Bachillerato General Unificado

MATEMÁTICA

1.º Curso

TEXTO DEL ESTUDIANTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

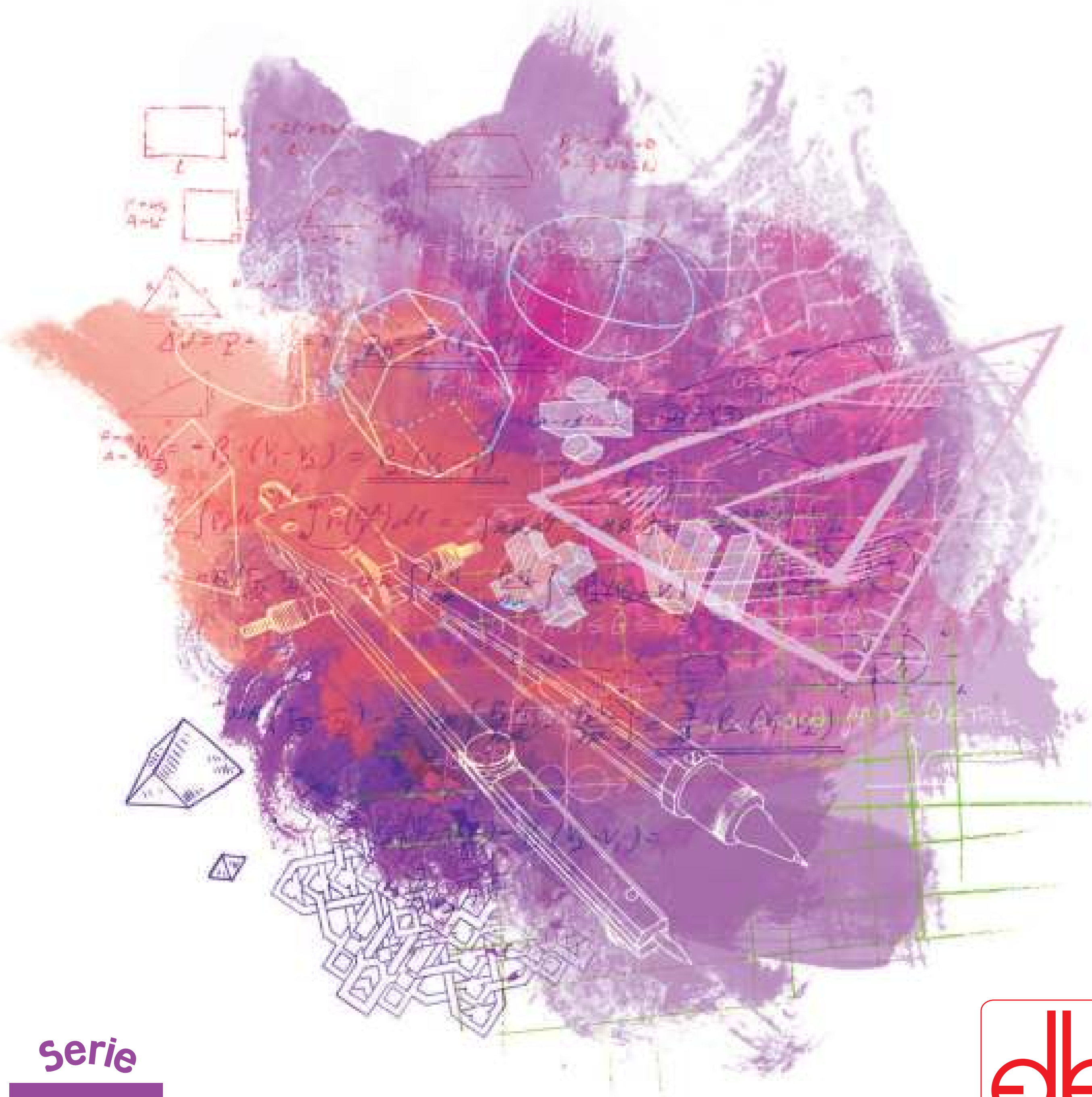
MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

Toda una Vida

EL GOBIERNO DE TODOS

Matemática

1 BGU



serie Ingenios

EDITORIAL DON BOSCO
edebé

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Lenín Moreno Garcés

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Fander Falconí Benítez

Viceministro de Educación
Álvaro Sáenz Andrade

Viceministra de Gestión Educativa
Mónica Reinoso Paredes

Subsecretaria de Fundamentos Educativos
Ruthy Intriago Armijos

Subsecretaria de Administración Escolar
Mónica García Echeverría

Directora Nacional de Currículo
María Cristina Espinosa Salas

Director Nacional de Operaciones y Logística
Germán Lynch Álvarez

ISBN: 978-9978-71-991-6
Primera impresión: agosto 2016
Quinta impresión: junio 2018
Impreso por: Medios Públicos EP

Editorial Don Bosco
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

Marcelo Mejía Morales
Gerente general

Eder Acuña Reyes
Dirección editorial

Sylvia Freile Montero
Adaptación y edición de contenidos

Roqueline Arguelles
Creación de contenidos nuevos

Luis Felipe Sánchez
Coordinación de estilo

Luis Felipe Sánchez
Revisión de estilo

Pamela Cueva Villavicencio
Coordinación gráfica

Pamela Cueva Villavicencio
Diagramación

Darwin Parra
Ilustración

Darwin Parra
Diseño de portada e ilustración

En alianza con

Grupo edebé
Proyecto: Matemáticas 1
Bachillerato primer curso

Antonio Garrido González
Dirección general

María Banal Martínez
Dirección editorial

José Estela Herrero
Dirección de edición de Educación Secundaria

Santiago Centelles Cervera
Dirección pedagógica

Juan López Navarro
Dirección de producción

Equipo de edición Grupo edebé
© grupo edebé, 2015
Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com

Este libro fue evaluado por la Universidad Tecnológica Equinoccial, y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el el 30 de mayo de 2016.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Toda una Vida

EL GOBIERNO DE TODOS

Tierra de Todos
Programa de Educación Ambiental

Promovemos la conciencia ambiental en la comunidad educativa.
Hemos impreso el 8% de ejemplares con certificado de responsabilidad ambiental.

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

2018: El valor del respeto

El inicio de un nuevo año escolar siempre nos produce ilusión. Todos los niños, niñas y adolescentes se preparan, no solo para estudiar y aprender, sino también para encontrarse con sus compañeros de aula. A veces nos topamos con caras nuevas en la clase, y eso es una buena señal, porque vemos que otros estudiantes se están integrando a nuestra institución educativa. Eso significa también que es una buena oportunidad para relacionarnos con personas distintas de las que ya conocíamos y así lograr nuevas amistades.

Sabemos que la escuela es un buen lugar para crecer y compartir muchas cosas positivas, y de vez en cuando también para enfrentar problemas. Ser solidarios y apoyar a quienes necesitan ayuda es un consejo que deberíamos seguir en la casa, la escuela y la comunidad.

El nuevo año escolar se abre como una experiencia que nos desafía y al mismo tiempo nos gratifica. Somos parte de la comunidad educativa, maestros, maestras, padres y madres de familia, representantes legales y parientes. Todos somos responsables de acompañarlos en el mejoramiento de su educación, en mejorar la calidad de sus conocimientos y en la experiencia de estudiar y aprender para crecer como mejores seres humanos y ciudadanos.

Un nuevo año escolar significa un trabajo dedicado a ampliar las relaciones positivas, a las que llamamos respeto. Nadie puede quedar fuera de esta práctica de todos los días en la escuela y la comunidad. Este valor de vida se opone radicalmente al desprecio y a la exclusión. Si queremos una educación justa, en la que todos podamos participar, el respeto hacia los otros significa aceptar sus propias formas de ser, sus características individuales, sociales, físicas y culturales; su manera de pensar y apreciar el mundo; sus costumbres y tradiciones; sus aptitudes y habilidades. Esta es la mejor propuesta que puede hacer el Ministerio de Educación al iniciar el nuevo año escolar.

El respeto hacia los demás significa el respeto a cada uno y cada una, a nosotros mismos. El respeto no acepta agresión alguna, ya sea física, sicológica o sexual. Implica reconocernos a nosotros mismos en las personas que nos rodean. Maestros y maestras, estudiantes y compañeras, somos todos seres humanos que tenemos los mismos derechos. Eso significa el derecho a tener nuestro propio punto de vista, el derecho a cambiar de opinión, a equivocarse, el derecho a crear un mundo propio en el cual vivir.

Este 2018 —año del respeto—, está inspirado en los principios de cero tolerancia al abuso y la violencia, a cualquier tipo de discriminación. Promovemos la equidad de género (igualdad entre hombres y mujeres), la justicia social, la solidaridad, la cultura de paz, la convivencia entre culturas y tradiciones diferentes, y el cuidado del ambiente. Todos estos son valores que debemos difundir y vivir a plenitud todos los días en la comunidad educativa.

Este es un año para defender con mucha decisión y compromiso los derechos de los estudiantes. Nuestro programa Más Unidos, Más Protegidos fue creado para prevenir la violencia dentro del sistema educativo. Vemos a la educación como un todo integrado; trabajamos para mejorar nuestro ambiente con importantes innovaciones curriculares como la metodología Tierra de Niñas, Niños y Jóvenes para el Buen Vivir. La incorporación de saberes ancestrales a la educación, el desarrollo de las artes, de la buena lectura, y una ambiciosa agenda digital forman parte de nuestra propuesta al iniciar el nuevo año escolar.

Esta es la acción integral que ahora promovemos, en la que niños, niñas y adolescentes participan como una fuerza decisiva dentro de toda la comunidad educativa. Sigamos caminando con buen paso y con respeto en este 2018.

Fander Falconí

Ministro de Educación

Presentación

Matemática 1 BGU ahora mismo es una página en blanco que, como tú, posee un infinito potencial.

Te presentamos Ingenios, el nuevo proyecto de Editorial Don Bosco que hemos diseñado para impulsar lo mejor de ti y que te acompañará en tu recorrido por el conocimiento.

Ingenios:

- Fomenta un aprendizaje práctico y funcional que te ayudará a desarrollar destrezas con criterios de desempeño.
- Propone una educación abierta al mundo, que se integra en un entorno innovador y tecnológico.
- Apuesta por una educación que atiende a la diversidad.
- Refuerza la inteligencia emocional.
- Refleja los propósitos del Ministerio de Educación que están plasmados en el currículo nacional vigente.
- Deja aflorar la expresividad de tus retos.
- Incorpora **Edibosco Interactiva**, la llave de acceso a un mundo de recursos digitales, flexibles e integrados para que des forma a la educación del futuro.
- Es sensible a la justicia social para lograr un mundo mejor.

Matemática 1 BGU te presenta los contenidos de forma clara e interesante. Sus secciones te involucrarán en proyectos, reflexiones y actividades que te incentivarán a construir y fortalecer tu propio aprendizaje. Las ilustraciones, fotografías, enlaces a páginas web y demás propuestas pedagógicas facilitarán y clarificarán la adquisición de nuevos conocimientos.

Construye con Ingenios tus sueños.

Índice

1 unidad temática

Lo números reales

Objetivos

- Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

Contenidos

Algebra y funciones (16 - 55)

Conjunto de números reales
- Propiedades de los números reales.
- Operaciones con reales
- Operaciones con potencias y radicales
- Intervalos de números reales
- Valor absoluto y distancia

Logaritmos
- Cálculo de logaritmos
- Propiedades de los logaritmos

Operaciones con polinomios
- Suma, resta y multiplicación de polinomios
- Método de Ruffini, Teorema del residuo y Método de Hörner.

Ecuaciones e inecuaciones
- Suma, resta y multiplicación de polinomios
- Inecuaciones fraccionarias con una incógnita
- Ecuaciones irracionales

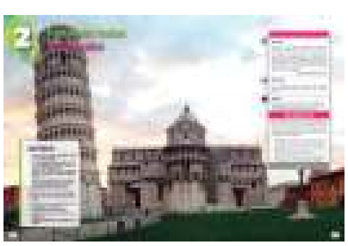
2 unidad temática

Funciones reales y racionales

Objetivos

- Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Contenidos



Algebra y funciones (56 - 87)

- Concepto de función
- Función afín
- Función afín a trozos
- Función potencia entera negativa con n= -1, -2.
- Función raíz cuadrada.
- Función raíz cuadrada. Traslaciones
- Función valor absoluto de la función afín.
- Operaciones con funciones reales
- Modelos matemáticos con funciones cuadráticas.

3 unidad temática

Límite y derivadas de funciones

Objetivos

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problemáticas del medio. solución de situaciones concretas.

Contenidos

Algebra y funciones (88 - 139)

- Noción intuitiva de límite
- Límite de funciones polinómicas y racionales en un punto
- Límites laterales
- Límites en el infinito
- Cálculo de límites
- Indeterminaciones.
- Continuidad de funciones. Operaciones
- Tasa de variación y tasa de variación instantánea
- Derivada de una función en un punto
- Función derivada.
- Función derivada y operaciones
- Aplicación de las derivadas. Monotonía
- Problemas de optimización
- Derivadas y las Tic

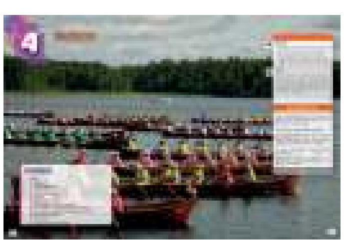
4 unidad temática

Vectores

Objetivo

- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problemáticas del medio.

Contenidos



Geometría y medida (140 - 167)

- Vectores fijos
- Vectores equipolentes
- Vectores libres
- Operaciones con vectores
- Base de v_2
- Dependencia de vectores
- Componentes de un vector en una base
- Componentes de un vector determinado por dos puntos
- Operaciones con vectores expresados por sus componentes
- Ángulo entre dos vectores
- Vector unitario

5 unidad temática

Elementos del plano

Objetivos

- Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Contenidos

Geometría y medida (168 - 203)

- Ecuaciones de la recta.
- Ecuación vectorial, ecuación paramétrica, ecuación general y explícita de la recta
- Rectas secantes
- Distancias. Distancia entre dos puntos
- Lugares geométricos. Mediatriz de un segmento
- Bisectriz de un ángulo
- Matemáticas y tic`s. Geogebra

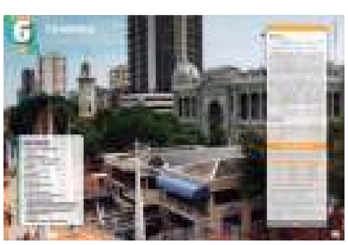
6 unidad temática

El proceso estadístico

Objetivos

- Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.el entorno social y económico, con un pensamiento crítico y reflexivo.

Contenidos



Estadistica y probabilidad (204 - 263)

- Repaso de conceptos básicos
- Tablas estadísticas datos no agrupados y de datos agrupados
- Gráficos estadísticos
- Tablas y gráficos con TIC
- Análisis de datos. Medidas de tendencia central
- Medidas de dispersión
- Medidas de posición
- Uso de TIC
- Estrategias de resolución de problemas

Destrezas con criterios de desempeño:

Destreza	Unidades 1	2	3	4	5	6
• Aplicar las propiedades algebraicas de los números reales en la resolución de productos notables y en la factorización de expresiones algebraicas.	✓					
• Identificar la intersección gráfica de dos rectas como solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	✓					
• Resolver analíticamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando diferentes métodos (igualación, sustitución, eliminación).	✓					
• Aplicar las propiedades de orden de los números reales para realizar operaciones con intervalos (unión, intersección, diferencia y complemento) de manera gráfica (en la recta numérica) y de manera analítica.	✓					
• Aplicar las propiedades de orden de los números reales para resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto.	✓					
• Descomponer funciones racionales en fracciones parciales resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.	✓					
• Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC.		✓				
• Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad).		✓				
• Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas con el empleo de la modelización con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con n= -1, -2, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.		✓				
• Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales aplicando propiedades de los números reales.		✓				
• Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.		✓				
• Calcular de manera intuitiva el límite cuando h→ $\mathbf{0}$ de una función cuadrática con el uso de calculadora como una distancia entre dos número reales.			✓			
• Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones cuadráticas a partir del cociente incremental.			✓			
• Interpretar de manera geométrica (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones cuadráticas con apoyo de las TIC.			✓			
• Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones cuadráticas con apoyo de las TIC.			✓			
• Realizar operaciones de suma, multiplicación y división entre funciones polinomiales y multiplicación de números reales por polinomios en ejercicios algebraicos de simplificación.	✓	✓				
• Aplicar las operaciones entre polinomios de grados ≤4, esquema de Hörner, teorema del residuo y sus respectivas propiedades para factorizar polinomios de grados ≤4 y reescribir los polinomios.	✓	✓				
• Resolver problemas o situaciones que pueden ser modelizados con funciones polinomiales identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.	✓	✓				
• Graficar funciones racionales con cocientes de polinomios de grado ≤3 en diversos ejemplos y determinar las ecuaciones de las asíntotas si las tuviera con ayuda de la TIC.		✓				
• Determinar el dominio, rango, ceros, paridad, monotonía, extremos y asíntotas de funciones racionales con cocientes de polinomios de grado ≤3 con apoyo de las TIC.		✓				
• Realizar operaciones de suma y multiplicación entre funciones racionales y de multiplicación de números reales por funciones racionales en ejercicios algebraicos para simplificar las funciones.		✓				
• Resolver aplicaciones, problemas o situaciones que pueden ser modelizados con funciones racionales identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos con apoyo de las TIC.		✓				

	Unidades					
	1	2	3	4	5	6
• Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones polinomiales de grado ≤ 4 a partir del cociente incremental.			✓			
• Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) y geométrica (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones polinomiales de grado ≤ 4 con apoyo de las TIC.			✓			
• Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado ≤ 2 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).			✓			
• Reconocer y graficar funciones exponenciales analizando sus características: monotonía, concavidad y comportamiento al infinito.		✓				
• Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas con ayuda de las TIC.		✓				
• Reconocer y resolver aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones exponenciales o logarítmicas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.		✓				
• Graficar vectores en el plano (coordenadas) identificando sus características: dirección, sentido y longitud o norma.				✓		
• Sumar, restar vectores y multiplicar un escalar por un vector de forma geométrica y de forma analítica aplicando propiedades de los números reales y de los vectores en el plano.				✓		
• Resolver y plantear problemas de aplicaciones geométricas y físicas (posición, velocidad, aceleración, fuerza, entre otras) de los vectores en el plano e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.				✓		
• Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar distancia entre dos puntos A y B en R como la norma del vector $\overrightarrow{AB}$.				✓		
• Reconocer que dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero y aplicar el teorema de Pitágoras para resolver y plantear aplicaciones geométricas con operaciones y elementos de R^2 apoyándose en el uso de las TIC (software como Geogebra, calculadora gráfica, applets en internet).				✓		
• Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección o a partir de dos puntos de la recta.				✓		
• Identificar la pendiente de una recta a partir de la ecuación vectorial de la recta para escribir la ecuación cartesiana de la recta y la ecuación general de la recta.					✓	
• Determinar la posición relativa de dos rectas en R^2 (rectas paralelas, que se cortan, perpendiculares) en la resolución de problemas (por ejemplo: trayectoria de aviones o de barcos para determinar si se interceptan).					✓	
• Calcular la distancia de un punto P a una recta (como la longitud del vector formado por el punto P y la proyección perpendicular del punto en la recta P´, utilizando la condición de ortogonalidad del vector dirección de la recta y el vector $\overrightarrow{PP}$) en la resolución de problemas (distancia entre dos rectas paralelas).					✓	
• Resolver y plantear aplicaciones de la ecuación vectorial, paramétrica y cartesiana de la recta con apoyo de las TIC.					✓	
• Calcular e interpretar la media, mediana, moda, rango, varianza y desviación estándar para datos no agrupados y agrupados con apoyo de las TIC.						✓
• Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados dentro del contexto del problema, con apoyo de las TIC.						✓
• Calcular e interpretar el coeficiente de variación de un conjunto de datos (agrupados y no agrupados).						✓
• Determinar los cuantiles (cuartiles, deciles y percentiles) para datos no agrupados y para datos agrupados.						✓
• Representar en diagramas de caja los cuartiles, mediana, valor máximo y valor mínimo de un conjunto de datos.						✓

Ministerio de educación. educacion.gob.ec.
Extraído el 11 de abril del 2016 desde la página web: http://goo.gl/lp5eV.

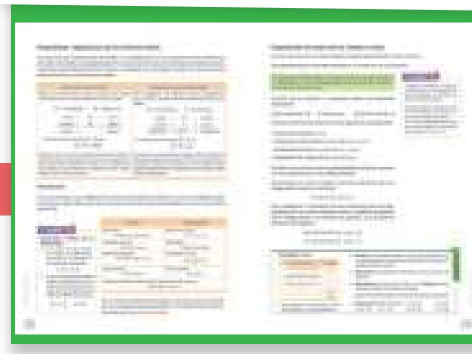
El proyecto de **Matemáticas** 1

Conoce tu libro

En contexto

- Noticias y enlaces que contextualizarán la temática a abordar.

Los contenidos



Los contenidos tendrán:
- Situaciones contextualizadas.
- Soporte visual.
- Uso de regletas y ábacos para facilitar la comprensión.

Zona Wifi

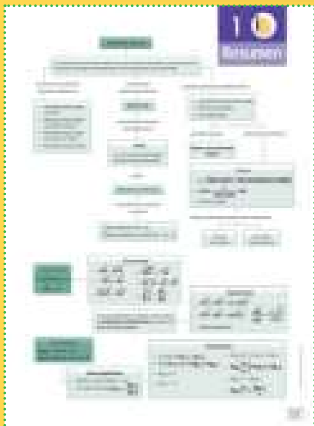
- En esta página verás cómo el tema de la unidad es tratado en la red.

Proyecto

Un alto en el camino

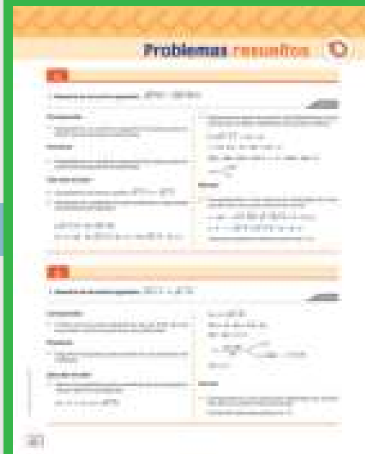
- Actividades de base estructurada.

Resumen



- Síntesis de lo aprendido.

Problemas resueltos



- Énfasis en la presentación clara de los procedimientos.

Ejercicios y problemas

- Para fortalecer tu aprendizaje, dispondrás de varios ejercicios.

Para finalizar

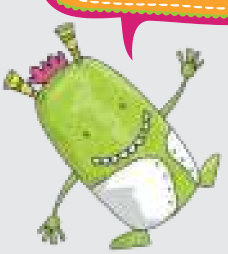
Evaluando tus destrezas

Autoevaluación

- Propuesta al final de cada bloque.

ÍCONOS

¿Qué significan estos íconos?



EN GRUPO

Y TAMBIÉN:

TIC

RECORTABLES

CALCULADORA

Conéctate con: Edibosco Interactiva

Actividades interactivas

Enlaces web

Videos

Perfiles interactivos

Documentos

Presentaciones multimedia

Laboratorios

0

Herramientas matemáticas

http://goo.gl/n1VFbq

CONTENIDOS:

1. Operaciones con radicales
2. Error
3. Notación científica
4. Intervalos
5. Operaciones con polinomios
6. Factorización
7. Ecuaciones y sistema de ecuaciones
8. Funciones y estadísticas
9. Probabilidad y combinatoria

REPASO Y REVISIÓN DE CONTENIDOS

1 Operaciones con radicales

1. **Simplifica** los siguientes radicales; **extrae** los factores posibles fuera del radical:

   a. $3^2 \cdot \sqrt{5^3\, a^2\, b^4}$

   b. $\sqrt{7 \cdot a^{10}\, b^9}$

   c. $-12\ \sqrt{2^7\, a^7}$

   d. $\frac{16}{5} \cdot \sqrt{\frac{25}{2}}$

2. **Efectúa**.

   a. $(2 + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{3}$

   b. $\sqrt{11} \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{3})$

   c. $\sqrt{7} \cdot (9 + \sqrt{2})$

   d. $\sqrt{5} \cdot (3 + \sqrt{5})$

3. **Racionaliza**.

   a. $\frac{6}{\sqrt[11]{a^7}}$

   b. $\frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

4. **Efectúa** las siguientes operaciones con radicales, simplifica el resultado cuando sea posible.

   a. $\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

   b. $\sqrt{\frac{972}{2}} + \sqrt{27} - \frac{-3}{2\sqrt{27}}$

   c. $\frac{\pi}{5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{5\sqrt{5}}{\frac{25}{\pi}} + 3\pi$

   d. $2\sqrt{21} + \frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{\frac{1}{3\sqrt{3}} + 1}{\sqrt{9}}$

5. **Calcula**.

   $$9 \cdot \sqrt{21} - 3 \cdot (\sqrt{21} + 8\sqrt{21}) - (3\sqrt{21} + \sqrt{21})$$

2 Error

6. Una aproximación por truncamiento del número 4,56789 es 4,56. **Halla** el error absoluto y el error relativo.

7. A partir de un mapa, hemos calculado que la distancia en línea recta entre Córdoba y Buenos Aires, en Argentina, es aproximadamente de 650 km, cuando en realidad es de 648,29 km. ¿Qué error absoluto hemos cometido? ¿Cuál es el error relativo?

8. Si un año luz corresponde a unos $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km, **expresa** el error absoluto del ejercicio anterior en metros, **utiliza** la notación científica.

9. Medimos experimentalmente con una técnica propia la distancia a una estrella del sistema solar y descubrimos que es de 6 años luz, cuando en realidad sabemos que es de 6,1 años luz. **Calcula** el error absoluto y el error relativo que hemos cometido.

10. La distancia media entre Neptuno y el Sol es de 30,07 unidades astronómicas (UA). **Exprésala** en kilómetros, **utiliza** la notación científica.

11. **Halla** el valor que se atribuye al diámetro del Sol. Si realizamos una medida experimental y cometemos un error relativo del 1% por encima de la medida encontrada en nuestras fuentes de información, ¿qué medida habremos llevado a cabo? **Exprésala** en kilómetros y en años luz.

12. Medimos la distancia entre el Sol y un planeta, y obtenemos 0,000 60 UA, cuando en realidad se sabe que la distancia exacta es de 0,000 57 UA. (1 UA = $1{,}496 \cdot 10^8$ km).

    a. **Calcula** el error absoluto y el error relativo cometidos.

    b. **Expresa** el error absoluto en kilómetros, **utiliza** la notación científica.

3 Notación científica

13. **Calcula**:

a. $720 \cdot 10^{-3} + 0{,}05 \cdot 10^{2} - 0{,}72$

b. $(1{,}5 \cdot 10^{4} + 50 \cdot 10^{2}): 7{,}5 \cdot 10^{-12}$

14. **Efectúa** las operaciones y **expresa** el resultado en notación científica:

a. $(3{,}2 \cdot 10^{12} + 16 \cdot 10^{3} - 5000 \cdot 10^{6}) + 0{,}62 \cdot 10^{10}$

b. $(72 \cdot 10^{-4} - 0{,}0012) \cdot 0{,}0000051$

4 Intervalos

15. **Escribe** de forma simbólica y **representa** gráficamente estos dos intervalos:

a. Números reales mayores o iguales que - 6 y menores o iguales que - 3.

b. Números reales mayores que - 2.

16. **Calcula** el intervalo común a cada una de las siguientes parejas de intervalos:

a. $(-6, 2)$ y $(-2, 3]$

b. $(-3, 5]$ y $(0, 3]$

c. $[0, 6]$ y $(1, 4]$

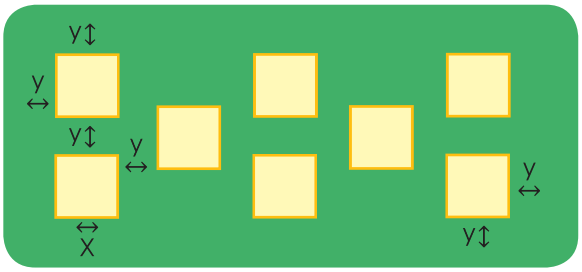
d. $[6, 9)$ y $[6, 7]$

e. $[-5, -3)$ y $(-4, -3]$

f. $(-11, 1)$ y $(0, 1)$

5 Operaciones con polinomios

17. Disponemos del siguiente tapiz.



—**Escribe** la expresión algebraica de:

a. El área total del tapiz

b. El área de color verde

c. El área de color amarillo

18. **Completa** el siguiente cuadrado mágico. La suma debe ser : $15x^2 + 3$

$2(x^2-1)$		
	$5x^2 + 1$	
$(2x)^2$		$4(2x^2+1)$

19. **Reescribe** las expresiones siguientes, **usa** las identidades notables:

a. $9 + 6x + x^2 = (\ldots + \ldots)^2$

b. $y^2 - 2yx + x^2 = (\ldots - \ldots)^2$

c. $\ldots^2 - 4 \ldots + \ldots^2 = (2a - b)^2$

d. $9y^2 + 6yx + x^2 = (\ldots + \ldots)^2$

e. $9 - x^2 = (\quad)(3 \ldots x)$

f. $9y^2 - 4x^2 =$

20. Dados los polinomios:

$A(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + x - \frac{3}{2}$

$B(x) = 5x^4 + 105x - \frac{7}{2}$

$C(x) = \frac{2}{5}x^3 - x - 1$

Realiza las siguientes operaciones:

a. $A(x) \cdot B(x)$

b. $A(x) \cdot C(x) - x^2 \cdot B(x)$

c. $[A(x) + B(x)]\, x + C(x)$

6 Factorización

21. **Factoriza** estos polinomios.

a. $x^3 + x^2 - 9x - 9$

b. $5x^3 + 15x^2 - 65x - 195$

c. $5x^3 + 5x^2 - 20x - 20$

d. $\frac{1}{8}m^3 - \frac{27}{64}n^3$

7 Ecuaciones y sistema de ecuaciones

22.**Resuelve** estas ecuaciones.

a. $1 - \frac{2x - 5}{40} = x - \frac{4x - 7}{10} + \frac{2}{3}x$

b. $\frac{3}{4}(2x - 1) - \frac{4}{5}(x - 3) = \frac{1}{2}x - 2$

c. $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}\right) + \frac{x}{4} = 1 - \frac{x - 2}{5}$

d. $\frac{5 + 2x}{3 + 4x} = \frac{1}{2}$

e. $3x - \left[\frac{1}{2} - \left[x - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x - 2}{2}\right)\right] - \frac{x - 1}{3}\right] = 1 - \frac{x}{4}$

23.Disponemos de vino de dos calidades diferentes a precios de \$ 0,35 /ℓ y \$ 0,80/ℓ. Si queremos obtener 200 ℓ de mezcla que resulte a \$ 0,50 /ℓ, ¿cuántos litros de cada clase tenemos que mezclar?

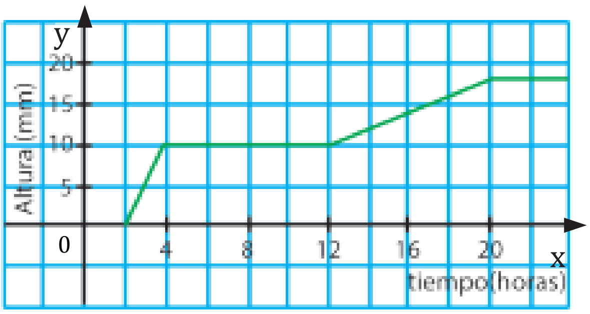
24.Al aumentar en 10 m los lados de un cuadrado obtenemos otro cuadrado cuya superficie es $200\ m^2$ mayor. ¿Cuáles son las dimensiones de los dos cuadrados?

25.Realizamos una prueba tipo test de 50 preguntas en la que las respuestas correctas sumaban 0,5 puntos y las no contestadas o incorrectas restaban 0,15. Si la nota final fue de 15,25, ¿cuántas preguntas se contestaron correctamente?

26.Se compran barriles de petróleo a dos grandes compañías A y B, que venden el crudo a un precio de \$105 el barril y \$ 80 el barril respectivamente. Si compramos 2000 barriles y en total el precio medio del barril resulta a \$ 95, ¿cuántos barriles se han comprado a cada compañía?

8 Funciones y estadísticas

27.La gráfica siguiente muestra la altura del agua en el pluviómetro de la estación meteorológica durante un día.



a. ¿Durante qué horas estuvo lloviendo?

b. ¿Durante qué horas llovió con más intensidad?

c. ¿Cuántos litros por metro cuadrado se recogieron entre las 2 y las 6 h?

Nota: Una variación de 1mm en el nivel del agua equivale a 1 litro por metro cuadrado.

28.**Representa** gráficamente la función dada por la siguiente tabla de valores.

Distancia en km (x)	1	2	3	4
Importe en dólares (y)	3,8	4,6	5,4	6,2

a. **Indica** qué tipo de función has representado.

b. **Calcula** la pendiente y la ordenada en el origen.

29.Las estaturas de los dieciséis jugadores de un equipo de fútbol son:

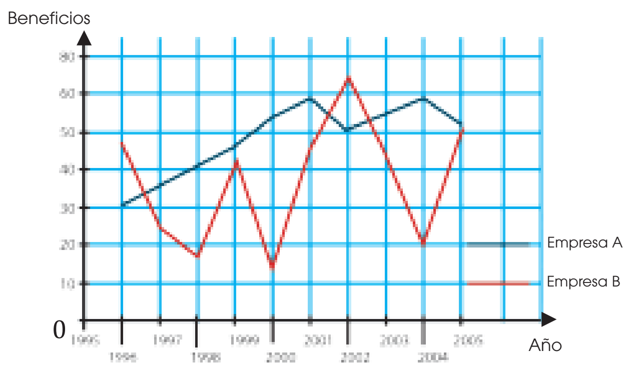
1,79; 1,74; 1,83; 1,96; 1,75; 1,68; 1,70; 1,76; 1,78; 1,82; 1,90; 1,80; 1,65; 1,91; 1,86; 1,89.

a. **Agrupa** estos datos en cuatro intervalos que vayan de 1,65 a 1,97, y **elabora** una tabla de distribución de frecuencias.

b. **Representa** las frecuencias absolutas en un histograma y **traza** el polígono de frecuencias.

30.La gráfica representa la evolución de los beneficios obtenidos durante varios años por dos empresas punteras dentro del mismo sector industrial.

¿Qué beneficio medio anual corresponde a cada una de las empresas? ¿Cuál es más rentable?



31.**Representa** gráficamente las siguientes funciones afines.

a. $y = x - 6$

b. $y = -2x + 1$

c. $y = 3x + 2$

—**Indica** en cada una de ellas la pendiente y la ordenada en el origen.

32.**Di** si las siguientes variables estadísticas son cualitativas (ordinales o nominales) o cuantitativas (discretas o continuas).

a. Año de nacimiento

b. Opinión sobre una determinada película.

c. Peso de los estudiantes de una clase

d. Color de la camiseta

33.La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina de cierto vehículo (en litros cada 100 km), calculado en doscientas ocasiones.

Intervalo	[6, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10)	[10, 11)
n_i	11	39	67	56	27

Determina manualmente la moda, la mediana y la media aritmética de la distribución de datos.

34.En una escuela se desea conocer el nivel cultural de sus alumnos. Para ello, se realiza un test a cien estudiantes y se obtienen estos datos.

Puntos	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[20, 30)	[40, 50)
n_i	12	34	38	12	4

¿Qué conclusiones pueden extraerse a partir de estos datos?

—**Justifica** tu respuesta teniendo en cuenta los parámetros de centralización y de dispersión.

35.En un lugar se mide la temperatura durante quince días y se obtienen estos valores (en °C):

13, 15, 12, 17, 18, 10, 18, 19, 22, 19, 16, 17, 18, 18, 18.

a. **Construye** la tabla de frecuencias.

b. **Calcula** todos los parámetros estadísticos que ya conoces.

36.Para estudiar la fiabilidad de dos tipos de test de control de alcoholemia, se efectúan varias pruebas de cada uno de ellos a una misma persona. Los resultados obtenidos son:

Test A: $\bar{x}$ = 0,09 mg/dly σ = 0,02 mg/dl

Test B: $\bar{x}$ = 0,09 mg/dl y σ = 0,05 mg/dl

—¿Qué test es más fiable? **Justifica** tu respuesta

9 Probabilidad y combinatoria

37. **Indica** si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas, y **explica** por qué.

    a. Repartir una mano de bridge y mirar las cartas que nos han tocado.

    b. Mezclar pinturas amarilla y azul, y observar qué color obtenemos.

    c. Determinar la presión a la que se encontrará un submarinista a 25 m de profundidad.

38. **Escribe** el espacio muestral de los experimentos a continuación.

    a. Lanzar una moneda.

    b. Lanzar dos monedas.

    c. Lanzar un dado con forma de dodecaedro.

    d. Extraer una bola de una bolsa que contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5.

39. Cogemos una carta de la baraja española. **Indica** los resultados favorables a cada uno de los siguientes sucesos.

    A: Obtener oros.

    B: No obtener una figura.

    C: Obtener un 5.

    D: Obtener una figura que no sea un rey

    —**Indica** el suceso contrario al suceso A.

40. Si lanzamos dos lados al aire, ¿qué suma tiene más posibilidades de salir, par o impar? ¿Qué suma tiene más posibilidades 4 o 8?

41. En una bolsa con 10 bolas, 6 rojas y 4 blancas, **calcula** la probabilidad de los siguientes sucesos:

    a. Sacar una bola roja

    b. Sacar una bola amarilla

42. De una baraja de cartas se extraen dos cartas, **escribe** dos sucesos equiprobables. ¿Qué combinación es más probable: dos figuras o dos ases? ¿Por qué? ¿Cuál es la probabilidad en cada caso?

43. Al realizar una extracción de una urna con números del 1 al 20 se obtienen los siguientes resultados:

    1, 1, 2, 6, 8, 10, 3, 15, 12, 20, 12, 11, 12, 1, 7, 5, 4, 2, 1, 2, 9, 10,11, 14, 17, 19, 9, 8, 19, 17, 16, 12, 12, 1, 19, 2, 5, 6, 8, 12.

    a. **Escribe** los resultados anteriores en una tabla.

    b. **Indica** cuál o cuáles son los resultados más probables.

    c. ¿Hay algún resultado que no haya salido en las extracciones?

    d. Si realizáramos más extracciones, ¿podemos asegurar que no saldrán?

44. En un candado de una cadena hay tres ruedas: la primera con números del 0 al 9, la segunda con números del 0 al 4 y la última del 0 al 2. ¿Cuántas combinaciones puedes hacer? ¿Cuál es la probabilidad de acertar la combinación?

45. En una carrera compiten solo tres corredores, ¿de cuántas maneras posibles pueden llegar a la meta?

46. **Completa** la tabla siguiente con las frecuencias absolutas y relativas del experimento:

x_i	n_i	f_i
1	23	
2		0,19
4		
5		0,20
6	17	
N	100	

    a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 6?

    b. ¿Y de sacar par?

1 Números reales

CONTENIDOS:

https://goo.gl/MtFhvH

Noticias:

El 14 de marzo se celebra el Día del Número Pi

El físico Larry Shaw fue quien, en 1988, creó este día conmemorativo, que en aquel entonces tuvo su primera celebración en el Museo Exploratorium de San Francisco, en California (EE. UU.), donde Shaw trabajaba. El Día Nacional de Pi fue reconocido por la Cámara de Representantes de los Estados Unidos en el año 2009.

RPP noticias, 14/03/2012

http://links.edebe.com/ftikke

Películas:

En el cine hay diversas películas en las que el número adquiere protagonismo. Un ejemplo es Cortina rasgada (Alfred Hitchcock, 1966), pero encontrarás otras referencias en el siguiente enlace:

http://links.edebe.com/uita

Web:

En esta página web encontrarás diversas curiosidades sobre el número:

http://links.edebe.com/4hypw

EN CONTEXTO:

1. **Investiga** en Internet sobre cuál ha sido la evolución de la cantidad de cifras conocidas del número π a lo largo de la historia.

2. Los números reales e y ϕ son tan conocidos como el número π. ¿Qué tienen en común?

—Busca en la Red alguna curiosidad sobre el número e relacionada con el cálculo financiero.

—¿En qué edificios de la Antigüedad está presente el número ϕ?

3. En el artículo "A vueltas con pi" cuyo enlace se incluye más arriba (en el apartado Película), se cita un diálogo de la serie Person of Interest sobre la infinitud de las cifras decimales de π
   a. ¿Qué sabes sobre los números irracionales y el número?
   b. ¿Qué preguntas o inquietudes te sugiere que en π estén incluidos todos los números y todas las palabras del mundo?
   c. ¿Qué te gustaría investigar sobre el tema? Ponga en común sus respuestas en el grupo de clase y establezcan posibles estrategias de investigación.

1. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Ya conoces las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto de los números racionales y también sus propiedades. En el caso de números irracionales, tomaremos aproximaciones decimales de estos números y operaremos con ellas. Es decir, las reduciremos a operaciones con números racionales.

Adición de números reales	Multiplicación de números reales
Para sumar dos números reales, sumamos las sucesivas aproximaciones decimales del mismo orden. $\sqrt{3} = 1.732\,050\,80...$; $\sqrt{8} = 2.828\,427\,12...$ $1.732\,0 < \sqrt{3} < 1.732\,1$ $+\ 2.828\,4 < \sqrt{8} < 2.828\,5$ $4.560\,4 < \sqrt{3} + \sqrt{8} < 4.560\,6$ El número real suma de $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ es: $\sqrt{3} + \sqrt{8} \approx 4.560\,5$ Observa que solo son correctas tres de las cuatro cifras decimales obtenidas al sumar las aproximaciones. Si queremos obtener la suma con un determinado orden de aproximación, debemos tomar algún orden más en los sumandos.	Para multiplicar dos números reales multiplicamos las sucesivas aproximaciones decimales del mismo orden. $\sqrt{6} = 2{,}449\,489\,74...$; $\pi = 3{,}141\,592\,65...$ $2{,}449\,4 < \sqrt{6} < 2{,}449\,5$ $\times\ 3{,}141\,5 < \pi < 3{,}141\,6$ $7{,}694\,790\,1 < \sqrt{6} \cdot \pi < 7{,}695\,349\,2$ El número real suma de $\sqrt{6} \cdot \pi$ es: $\sqrt{6} \cdot \pi = 7{,}694\,795$ En este caso, solo podemos asegurar las dos primeras cifras decimales del producto. Como en la adición, si queremos obtener el producto con un determinado orden de aproximación, debemos tomar algún orden más en los factores.

Tabla 1

1.1 Propiedades de los números reales

Como la adición y la multiplicación de números reales consisten en sumar y multiplicar aproximaciones decimales, que son números racionales, las propiedades en $\mathbb{R}$ son las mismas que en $\mathbb{Q}$.

Se cumple: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$

Adición	Multiplicación
Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$	Elemento neutro: $a \quad 1 = 1 \quad a = a$
Elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$	Asociativa: $a \ (b \ c) = (a \ b) \ c$
Elemento opuesto: $a + (-a) = (-a) + a = 0$	Elemento inverso: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
Conmutativa: $a + b = b + a$	Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
Distributiva de la multiplicación respecto de la adición: $a \ (b + c) = a \ b + a \ c$	

Tabla 2

Por cumplirse estas propiedades, decimos que el conjunto $\mathbb{R}$ con las operaciones de adición y multiplicación tiene estructura de cuerpo conmutativo.

Y TAMBIÉN: ¿?

Sustracción y división de números reales

- La resta de dos números reales la obtenemos al sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$a - b = a + (-b)$$

- El cociente de dos números reales lo obtenemos al multiplicar uno de ellos por el inverso del otro (siempre que éste sea diferente de cero).

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \qquad (b \neq 0)$$

1.2. Propiedades de orden de los números reales

Hemos visto que los números reales pueden representarse sobre la recta.

Esta representación permite establecer un orden en el conjunto $\mathbb{R}$.

Dados dos números reales, **a** y **b**, decimos que a es menor que **b** y escribimos a < **b** si, al representarlos sobre la recta real, **a** queda situado a la izquierda de **b**..

A partir de la relación <, podemos definir las restantes relaciones:

$a \leq b \leftrightarrow a < b$ o $a = b$ $\quad a > b \leftrightarrow b < a \quad$ $a \geq b \leftrightarrow b < a$ o $b = a$

De estas definiciones deducimos las siguientes propiedades:

- Propiedad reflexiva: $a \leq a$
- Propiedad antisimétrica: $a \leq b$ y $b \leq a \leftrightarrow a = b$
- Propiedad transitiva: $a \leq b$ y $b \leq c \rightarrow a \leq c$
- Propiedad de orden total: $a \leq b$ o $b \leq a$

Y TAMBIÉN: ¿?

El signo $\leftrightarrow$ se lee si, y sólo si, y significa que las expresiones que aparecen a ambos lados son equivalentes.

Análogamente, podemos definir la relación de orden en sentido contrario, es decir:
$b > a$ si la representación de **b** en la recta está a la derecha de la de **a** o si $b - a > 0$.

Por último, enunciamos dos propiedades que tienen que ver con las operaciones y las desigualdades:

Si sumamos un mismo número a los dos miembros de una desigualdad, esta se mantiene:

$$\text{si } a \leq b \Leftrightarrow a \pm c \leq b \pm c$$

Si se multiplican o dividimos los dos miembros de una desigualdad por un mismo número real, se mantiene el sentido de la desigualdad si el número es positivo, y se invierte el sentido si es negativo:

$$\text{si } a \leq b \text{ y } c \Leftrightarrow 0\ 1\ c \cdot a \leq c \cdot b$$

$$\text{si } a \leq b \text{ y } c \Leftrightarrow 0\ 1\ c \cdot a \geq c \cdot b$$

Actividades

1. **Representa** gráficamente de forma geométrica sobre la recta real los números $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{8}$

2. **Representa** gráficamente sobre la recta real los números siguientes:
   $-\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$, $-3\sqrt{6}$

3. Al determinar el valor de $\sqrt{10}$ con la calculadora obtenemos el siguiente número: 3,16227766....
   Representa sobre la recta este número de manera aproximada.

4. **Ordena** los números reales de cada par.
   a) $-\sqrt{3}$ y $-\frac{1}{2}$ b) π y $3{,}1\widehat{4}$ c) π y $\sqrt{11}$

5. **Representa** sobre la recta real y ordena de menor a mayor los números siguientes:
   $\sqrt{2}$; $\frac{-1}{3}$; 0 ; 3,1514 ; $-\sqrt{3}$; π

6. **Ordena** de menor a mayor el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas si x es un número real mayor que 1.
   $\frac{2}{5}x$; x; $x \cdot 10^{-2}$; $0{,}3\,x$; $-\frac{1}{5}x$; $\frac{4x}{9}$

1.3. Potenciación de números reales con exponente entero

Sabemos que el producto de varios números racionales iguales puede expresarse como una potencia de base racional.

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$

La potencia de base a, es un número real y su exponente es un número natural n, la potencia es el producto del número a por sí mismo, n veces.

$$\underbrace{a^{n} = a\cdot a\cdot a\dots a}_{n\ veces}$$

$$\frac{a^{6}}{a^{5}} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a} = a^{1}$$

Pero, ¿qué sucede si el exponente de una potencia es 1? En tal caso no podemos aplicar la definición de potencia, ya que no existen productos con un único factor. En este caso se toma como valor de la potencia la propia base. Así, por ejemplo, $\pi^{1} = \pi$.

$$\frac{a^{n+1}}{a^{n}} = a^{1} \qquad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

Las operaciones con potencias de base real y exponente natural tienen las mismas propiedades que las de base racional.

Consideremos seguidamente el caso en que el exponente sea un número entero.

Las potencias de base real y exponente entero positivo son justamente las potencias de base real y exponente natural. Pero ¿qué ocurre si el exponente es 0 o un número entero negativo?

A las potencias de exponente 0 o un número entero negativo las definimos de manera que las propiedades de las potencias de exponente natural continúen siendo válidas, en particular la propiedad de la división de potencias de la misma base.

<table>
<tr><th>Potencias de exponente 0</th><th>Potencias de exponente negativo</th></tr>
<tr><td>

- Consideramos la división $\pi^{4} : \pi^{4}$.

$\pi^{4} : \pi^{4}$ → $\frac{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi}{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi} = 1$ → $\boxed{\pi^{0} = 1}$

Si aplicásemos la regla para dividir potencias → $\pi^{4-4} = \pi^{0}$

La potencia de base número real a, a ≠ 0, y exponente 0 es igual a 1.

$a^{0} = 1$, con $a \neq 0$

</td><td>

- Consideramos la división $\pi^{3} : \pi^{5}$.

$\pi^{3} : \pi^{5}$ → $\frac{\pi\cdot\pi\cdot\pi}{\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi} = \frac{1}{\pi\cdot\pi} = \frac{1}{\pi^{2}}$ → $\boxed{\pi^{-2} = \frac{1}{\pi^{2}}}$

Si aplicásemos la regla para dividir- potencias → $\pi^{3-5} = \pi^{-2}$

La potencia de base número real a, a ≠ 0, y exponente un número entero negativo - es igual al inverso de la potencia de base a y exponente positivo.

$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$

</td></tr>
</table>

Tabla 3

1.4. Raíz enésima de un número real

Los radicales están estrechamente relacionados con las potencias. En este apartado veremos cómo se relacionan y aprenderemos a trabajar con expresiones en las que aparecen radicales o potencias de exponente racional.

Las raíces cuadradas de un número real b son los números reales $+a$ y $-a$ si y solo si: $(+a)^2 = b$ y $(-a)^2 = b$. Se expresa: $\sqrt{b} = \pm a$.

Observa que b debe ser un número real mayor o igual que 0, ya que es una potencia par de $+a$ y de $-a$. De este modo:

TIC

Si accedes a la página **http://www.josemariabea.com/index.php/tecnicasde-calculo-mental/5-raices-cuadradas**, encontrarás una estrategia para calcular mentalmente raíces cuadradas de números entre 1 y 1 000. Observarás que el resultado que obtienes es aproximado, pero se va acercando más al resultado real cuanto mayor es el número.

Si el radicando es positivo...	Si el radicando es negativo ...
Existen dos raíces cuadradas que son dos números reales opuestos. $\sqrt{25} = \pm 5$	No existe ninguna raíz cuadrada real. $\sqrt{-3} = ?$

Tabla 4

También conviene observar que si b es un número racional, su raíz cuadrada puede ser un número racional o irracional.

Si el radicando es un racional cuadrado perfecto...	Si el radicando no es un racional cuadrado perfecto...
La raíz cuadrada es un número racional. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm \frac{3}{4}$	La raíz cuadrada es un número irracional. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

Tabla 5

A las raíces de índice diferente de 2 las definimos de forma parecida a las raíces cuadradas.

Por ejemplo, el número 125 es el resultado de elevar al cubo el número 5. Así, el número 5 es la raíz cúbica de 125. Y el número -125 es el resultado de elevar al cubo el número -5. Así, el número -5 es la raíz cúbica de -125.

b es la raíz enésima de a, es decir, $b=\sqrt[n]{a}$, si y solo si $b^n = a$, donde a, b son reales y n es un natural mayor que 1

$$b=\sqrt[n]{a}\ \left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{\ }\ \text{es el signo radical.}\\ n \text{ es el índice del radical.}\\ a \text{ es el radicando.}\\ b \text{ es la raíz.}\end{array}\right.$$

Actividades

7. **Señala** en cuáles de las fracciones siguientes el numerador y el denominador son cuadrados perfectos.

$$\frac{125}{4};\ \frac{9}{16};\ \frac{99}{35};\ \frac{16}{25};\ \frac{111}{38};\ \frac{169}{81}$$

a. **Escribe** las raíces cuadradas de todas las fracciones.

b. **Clasifica** las raíces obtenidas en números racionales y números irracionales.

1.5. Radicales, signos y radicales semejantes

Signo de la raíz

Para averiguar cuál será el signo de la raíz, observaremos el signo del radicando y la paridad del índice. **Fíjate** en la siguiente tabla:

Raíz	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{-343} = -7$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\pm 2}{3}$	$\sqrt[4]{\frac{-16}{81}} = ?$
Paridad del índice	Impar	Impar	Par	Par
Signo del radicando	+	-	+	-
Número de raíces	Una (positiva)	Una (negativa)	Dos (positiva y negativa)	No tiene

Tabla 6

TIC

Si accedes a la página http://descartes.cnice.mec.es/edad/4esomatematicasB/radicales/quincena2_contenidos_1f.htm, podrás comprobar, mediante diferentes ejemplos, si dos radicales son semejantes o no.

Podemos concluir:

- Si el índice es impar, la raíz tiene el mismo signo que el radicando.
- Si el índice es par y el radicando es positivo, existen dos raíces que son dos números reales opuestos.
- Si el índice es par y el radicando es negativo, no existe ninguna raíz real.

Expresiones radicales semejantes

Observa el resultado de la siguiente suma: $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 4 \cdot \sqrt{5}$

El número 4 es el coeficiente. En general, en una expresión de la forma $a \cdot \sqrt[n]{b}$ llamamos coeficiente al número a que multiplica al radical.

Observa las expresiones siguientes: $3 \cdot \sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $12 \cdot \sqrt{5}$. En todos los casos tenemos un coeficiente que multiplica a un mismo radical.

Dos expresiones radicales de la forma $a \cdot \sqrt[n]{b}$ y $c \cdot \sqrt[n]{b}$ son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Actividades

8. **Indica** el signo de las raíces de estos números reales y **efectúalas** si es posible.

$$\sqrt{\frac{11}{13}},\ \sqrt[4]{-\frac{11}{13}},\ \sqrt[3]{-\frac{27}{64}},\ \sqrt[3]{\frac{3}{24}},\ \sqrt[8]{-\frac{108}{172}},\ \sqrt[3]{-\frac{111}{333}},\ \sqrt[4]{-\frac{625}{81}},\ \sqrt{\frac{1\,052}{4\,208}},\ \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$$

9. **Agrupa** las expresiones radicales semejantes.

$4\sqrt[3]{2}$; $-2\sqrt{5}$; $6\sqrt{5}$; $7\sqrt[4]{3}$; $-6\sqrt[3]{2}$

1.6. Operaciones con radicales

Podemos multiplicar, dividir, elevar a una potencia o extraer la raíz de cualquier radical. Sin embargo, para sumar o restar dos radicales, estos deben ser semejantes.

Suma y resta de radicales

La suma o resta de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es igual a la suma o resta de los coeficientes de los radicales sumandos.

$$a \cdot \sqrt[n]{b} + c \cdot \sqrt[n]{b} = (a + c) \cdot \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 1

Calcula:

a. $-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$

b. $7\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

c. $12\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$

Desarrollo:

a. $-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = (-1 + 3 - 4 + 8) \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

b. $7\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (7 + 8) \sqrt{5} + (-6 - 3 - 4) \sqrt{3} = 15\sqrt{5} - 13\sqrt{3}$

c. $12\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 9\sqrt{7} = (12 - 8 + 9) \cdot \sqrt{7} = 13\sqrt{7}$

Multiplicación de radicales

El producto de radicales del mismo índice es igual a otro radical con igual índice cuyo coeficiente y cuyo radicando son iguales, respectivamente, a los productos de los coeficientes y los radicandos de los factores.

$$a\sqrt[n]{b} \cdot c\sqrt[n]{d} = a \cdot c\sqrt[n]{b \cdot d}$$

División de radicales

El cociente de dos radicales del mismo índice es igual a otro radical con igual índice cuyo coeficiente y cuyo radicando son iguales, respectivamente, al cociente de los coeficientes y los radicandos de los radicales dividendo y divisor.

$$\frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

Actividades

10. **Efectúa.**

a. $-2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 7\sqrt{7}$

b. $\frac{1}{3\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - \frac{1}{6\sqrt{2}}$

c. $5\sqrt{11} - 3\sqrt{17} - 4\sqrt{11} - 9\sqrt{11} + 8\sqrt{17}$

11. **Expresa** como la raíz de un cociente:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2b}}; \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16c}}; \frac{\sqrt{12a}}{\sqrt{3a}}$$

Ejemplo 2

Calcula.

a. $2\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot 7\sqrt{3}$

b. $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

c. $\frac{6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$

Solución:

a. $2\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot 7\sqrt{3} = 2\cdot 7\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 3} = 14\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}$

b. $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$

c. $\frac{6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = \frac{6\cdot 6}{8}\sqrt{5} = \frac{9}{2}\sqrt{5}$

Potencia de un radical

La potencia de un radical es igual a otro radical cuyo coeficiente y cuyo radicando están elevados a dicha potencia.

$$(a\sqrt[n]{b})^m = a^m\cdot\sqrt[n]{b^m}$$

Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical cuyo radicando es el mismo y cuyo índice es el producto de los índices de las raíces.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Ejemplo 3

Calcula.

a. $(2\sqrt{7})^5$

b. $\sqrt{\sqrt[3]{48}}$

c. $\sqrt{\sqrt{3}}$

Solución:

a. $(2\sqrt{7})^5 = 2^5\cdot(\sqrt{7})^5 = 2^5\sqrt{7^5}$

b. $\sqrt{\sqrt[3]{48}} = \sqrt[2\cdot 3]{48} = \sqrt[6]{48}$

c. $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[2\cdot 2]{3} = \sqrt[4]{3}$

Actividades

12. **Di** si son ciertas o falsas las siguientes igualdades:

a. $\sqrt{8\cdot a} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a}$

b. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

c. $\sqrt{81} = \sqrt{3}\sqrt{27} = 3\cdot\sqrt{27}$

d. $\sqrt{93^3} = \sqrt[3]{93}$

e. $\sqrt{\sqrt{81}} = 3$

f. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

13. **Calcula.**

$\sqrt{\sqrt{625}}$; $\left(\sqrt{5}\right)^2$; $\left(\sqrt{\frac{12}{7}}\right)^4$; $\sqrt{\sqrt{16}}$

1.7. Operaciones combinadas

También podemos encontrar series de operaciones combinadas en las que aparezcan radicales. Para resolverlas tendremos en cuenta el orden de prioridad de las operaciones que ya conoces.

Ejemplo 4

Calcula.

a. $\sqrt{2}(3-4\sqrt{5}) = 3\sqrt{2}-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{2}-4\sqrt{10}$

Aplicamos la propiedad distributiva.

b. $(2+3\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{2}) = 2(5-\sqrt{2})+3\sqrt{2}(5-\sqrt{2}) = 2\cdot 5-2\sqrt{2}+3\cdot 5\sqrt{2}-3\sqrt{2}\sqrt{2}$

$= 10-2\sqrt{2}+15\sqrt{2}-6 = 4+13\sqrt{2}$

Agrupamos términos semejantes.

c. $(2+\sqrt{3})^2 = (2+\sqrt{3})\ (2+\sqrt{3}) = 2(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) = 4+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{3} = 4+4\sqrt{3}+3 = 7+4\sqrt{3}$

d. $(6+\sqrt{2})\cdot(6-\sqrt{2}) = 6(6-\sqrt{2})+\sqrt{2}(6-\sqrt{2}) = 36-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2} = 36-2 = 34$

Observa que el último resultado no tiene radicales. Esto se debe a que es el producto de la suma de dos números por su diferencia, que da como resultado la diferencia de los cuadrados: $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$. Y esto, en el caso de una raíz cuadrada, conlleva la eliminación de la raíz. También se podía haber resuelto de esta manera:

$$(6+\sqrt{2})\cdot(6-\sqrt{2}) = 6^2-(\sqrt{2})^2 = 36-2 = 34$$

Decimos que una suma de radicales y su diferencia son expresiones conjugadas.

Así, $a+b$ es la expresión conjugada de $a-b$ y, recíprocamente, $a-b$ es la expresión conjugada de $a+b$.

Al multiplicar dos expresiones conjugadas desaparecen las raíces cuadradas que pudieran existir.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$$

Y TAMBIÉN: ¿?

La expresión conjugada de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Actividades

14. **Efectúa.**

a. $(2+\sqrt{7})\cdot\sqrt{3}$ b. $\sqrt{11}\cdot(\sqrt{11}+\sqrt{3})$ c. $\sqrt{7}\cdot(9+\sqrt{2})$ d. $\sqrt{5}\cdot(3+\sqrt{5})$

15. **Calcula.**

a. $(11+\sqrt{2})^2$ b. $\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2$ c. $\left(\sqrt{10}-\sqrt{17}\right)\cdot\left(\sqrt{10}+\sqrt{17}\right)$ d. $\left(7-\sqrt{21}\right)\cdot\left(7+\sqrt{21}\right)$

16. **Escribe** la expresión conjugada de cada una de estas expresiones:

$$2+\sqrt{3}\ ;\ 3-5\sqrt{2}\ ;\ 1-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3}-5$$

—**Multiplica** cada expresión por su conjugada.

Y TAMBIÉN: ¿?

Entre dos números racionales cualesquiera hay infinitos números racionales.
Cuando un conjunto cumple esta propiedad, decimos que es denso.

1.8. Potenciación de números reales con exponente racional

A las potencias de exponente racional las definimos mediante radicales del modo siguiente.

La potencia de base un número real a y de exponente un número racional m/n se define como la raíz de índice n y radicando a^m.

Así, observamos que los radicales pueden expresarse como potencias de exponente racional y viceversa. En los siguientes ejemplos, aprenderemos cómo se transforman mutuamente unos en otros.

Y TAMBIÉN: ¿?

Propiedades de las operaciones con potencias de exponente entero

- Multiplicación de potencias de la misma base

  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

- División de potencias de la misma base

  $a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a > 0)$

- Potencia de un producto

  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

- Potencia de una potencia

  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejemplo 5

Expresa como potencias de exponente racional.

a. $\sqrt[3]{-12}$ b. $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$

Apliquemos la definición.

a. $\sqrt[3]{-12} = (-12)^{\frac{1}{3}}$ b. $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{5}}$

Ejemplo 6

Expresa en forma de radical.

a. $124^{\frac{1}{4}}$ b. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

Apliquemos la definición.

a. $124^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{124}$ b. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

A las potencias de exponente racional las definimos de manera que las propiedades de las potencias de exponente entero continúen siendo válidas. Así, para operar con potencias de exponente racional, aplicaremos las propiedades que se recogen al margen. **Fíjate** en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7

Calcula:

a. $(2 + a)^3 \cdot (2 + a)^{\frac{1}{4}} \cdot (2 + a)^{\frac{3}{2}}$

b. $(-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} : (-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$

c. $(-9 \cdot a \cdot b2)^{\frac{3}{11}}$

d. $\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}}$

Apliquemos las propiedades de las operaciones con potencias.

a. $(2 + a)^3 \cdot (2 + a)^{\frac{1}{4}} \cdot (2 + a)^{\frac{3}{2}} = (2 + a)^{3 + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}} = (2 + a)^{\frac{19}{4}}$

b. $(-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} : (-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = (-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}} = (-4 - 2\sqrt{3})^{\frac{7}{6}}$

c. $(-9 \cdot a \cdot b2)^{\frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}} \cdot a^{\frac{3}{11}} \cdot b^{2 \cdot \frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}} \cdot a^{\frac{3}{11}} \cdot b^{\frac{6}{11}}$

d. $\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{15}{8}}$

Las potencias de exponente racional y negativo pueden transformarse en potencias de exponente positivo, como en el caso de potencias de exponente entero. Para ello, tendremos en cuenta que una potencia de exponente negativo es igual al inverso de la potencia de la misma base con exponente positivo.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Fíjate en cómo expresamos con exponente positivo estas potencias:

$$5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}} \quad ; \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{6}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{6}}$$

El siguiente cuadro, recoge las propiedades de las operaciones con potencias de base real y exponente racional, a las cuales añadimos esta última, relativa a las potencias de exponente negativo

Potencias de base real y exponente racional
$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ (con $a \neq 0$)
$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$
$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$
$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

Tabla 7

Y TAMBIÉN: ¿?

Una potencia de base real y exponente entero negativo es igual al inverso de la potencia de la misma base con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

La potenciación y la radicación son operaciones inversas.

$$\sqrt{a^2} = a$$

Lo cual podemos demostrar al aplicar las propiedades de las operaciones con potencias de exponente racional.

$$\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}2} = a^1 = a$$

CALCULADORA

Las teclas para el cálculo de raíces suelen ser:

$\sqrt{\ }$ Para el cálculo de la raíz cuadrada.

$\sqrt[3]{\ }$ Para el cálculo de la raíz cúbica.

$\sqrt[x]{\ }$ Para el cálculo de cualquier raíz de índice x.

Así, para calcular $\sqrt{144}$ efectuamos: 1 4 4 $\sqrt{\ }$ = → 12

Para calcular $\sqrt[3]{125}$: 1 2 5 $\sqrt[3]{\ }$ = → 5

Y, para calcular $\sqrt[7]{245}$: 2 4 5 $\sqrt[x]{\ }$ 7 = → 2.1943679

1. **Halla** con tu calculadora: $\sqrt[7]{245}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt{1\,250}$; $\sqrt[6]{654}$

2. **Utiliza** la calculadora para hallar:

$\sqrt{576}$; $\sqrt[5]{75}$; $\sqrt[7]{124}$; $\sqrt[3]{1\,250}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{81}}$; $\sqrt{\frac{32}{75}}$; $\sqrt[3]{\frac{12}{56}}$

Actividades

17. **Di** cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y cuáles no:

a. $(-3 + 2\sqrt{7})^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{(-3 + 2\sqrt{7})^{3}}$

b. $(25 \cdot a \cdot b^3)^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{(25 \cdot a \cdot b^3)}$

c. $(-6 - a)^{-\frac{2}{3}} = \left[(-6 - a)^{\frac{2}{3}}\right]^{-1}$

d. $a^{\frac{-1}{4}} \; a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{3}}$

La transformación de raíces en potencias puede ser muy útil a la hora de efectuar operaciones con radicales. A estas la podemos resolver por los procedimientos ya vistos al estudiar las operaciones con radicales o bien, transformando los radicales en potencias de exponente racional y aplicando sus propiedades.

Comprobemos estas dos formas de proceder en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8

Resolvamos:

$$\frac{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[4]{5}}$$

Primera resolución

Apliquemos las propiedades de las operaciones radicales.

$$\frac{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}\ \sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}}=$$

Apliquemos los radicales semejantes.

$$\sqrt{\frac{3^3}{3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{5^5}{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{2^3\cdot 2^2}}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt[4]{5^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{2^5}}=$$

$$=3\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$$

Segunda resolución

Apliquemos las propiedades de las operaciones con potencias.

$$\frac{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[4]{5}}=3^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{-1}{2}}\cdot 2^{\frac{-3}{5}}\cdot 2^{\frac{-2}{5}}\cdot 5^{\frac{-1}{4}}=$$

$$=3^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{-1}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{4}}\cdot 5^{\frac{-1}{4}}\cdot 2^{\frac{-3}{5}}\cdot 2^{\frac{-2}{5}}=$$

Apliquemos las potencias de la misma base.

$$=3^{\frac{3}{2}-\frac{-1}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{4}-\frac{-1}{4}}\cdot 2^{\frac{-3}{5}-\frac{-2}{5}}=3\cdot 5\cdot 2^{-1}=\frac{15}{2}$$

Actividades

18. **Expresa** en forma de radical. A continuación, **di** cuáles son semejantes.

$$(-3)^{\frac{1}{3}}\ ;\ 4^{\frac{1}{5}};\ (-7)^{\frac{1}{3}}\ ;\ 9^{\frac{1}{6}};\ 25^{\frac{1}{4}}\ ;\ 4\cdot 9^{\frac{1}{6}};\ 2\ \ (-3)^{\frac{1}{3}}$$

19. El número $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ puede expresarse en forma de potencia de exponente negativo como $2^{-\frac{1}{3}}$. **Expresa** de la misma forma:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}};\ \frac{1}{\sqrt[5]{2}};\ \frac{1}{\sqrt[4]{5}};\ \frac{2}{\sqrt[3]{9}};\ \frac{-2}{\sqrt[6]{3}}$$

20. **Expresa** en forma de una sola potencia:

a. $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$

b. $\left(\frac{-3}{4}\right)^{4}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^{\frac{-2}{5}}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)$

c. $\left[(1+\sqrt{2})^{3}\right]^{\frac{3}{5}}:(1+\sqrt{2})^{\frac{-1}{2}}$

d. $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-7}:\left(\frac{-1}{5}\right)^{-7}$

1.9. Intervalos de números reales

Puesto que el conjunto de los números reales está ordenado, podemos hablar de los números reales comprendidos entre dos números reales determinados. Estos números se corresponden con un segmento de la recta real y constituyen lo que denominamos un intervalo.

Según contengan o no los extremos, se tienen los siguientes tipos:

Y TAMBIÉN: ¿?

El símbolo ● indica el extremo contenido por el intervalo y el símbolo o, el no contenido.

Intervalos		
Cerrado	Abierto	Semiabierto
El intervalo cerrado de extremos a y b, $a < b$, es el conjunto de todos los reales comprendidos entre a y b, incluidos los extremos. Se representa por $[a, b]$.	El intervalo abierto de extremos a y b, $a < b$, es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b, excluidos los extremos. Se representa por (a, b).	El intervalos semiabierto de extremos a y b, $a < b$, es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre a y b y que contiene solamente uno de los extremos. Se representa por $(a, b]$ o $[a, b)$, según el extremo que contenga sea el derecho o el izquierdo.
 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Tabla 8

La distancia entre los extremos a y b y, en general, la distancia entre dos números reales a y b es el valor absoluto de su diferencia: $d(a, b) = |a-b|$

Así, la distancia entre -4 y 5 es: $d(-4, 5) = |-4 - 5| = |-9| = 9$

Intervalos infinitos

A los intervalos que en uno de sus extremos tienen el símbolo ∞ los llamamos intervalos infinitos, y los correspondemos con semirrectas de la recta real.

Y TAMBIÉN: ¿?

El símbolo $+\infty$ (más infinito) no representa ningún número real. Lo utilizamos para indicar un valor mayor que cualquier número real.
De la misma manera, al símbolo $-\infty$ (menos infinito) lo utilizamos para indicar un valor menor que cualquier número real.

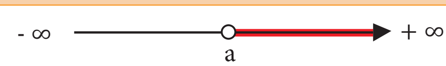
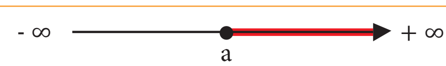
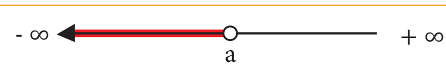
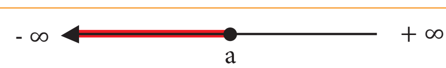
Intervalo	Representación
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	

Tabla 9

Observa que si los dos extremos son infinitos obtenemos la recta real: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

1.10. Operaciones con intervalos, unión e intersección

Como los intervalos en la recta real son conjuntos de números, las operaciones entre ellos se realizan aplicando los mismos procedimientos de operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica, complemento, leyes de Morgan, etc. Los resultados de las operaciones con intervalos se pueden expresar en notación de intervalo, en notación de conjunto o gráficamente.

Y TAMBIÉN: ¿?

Unión e intersección de conjuntos

- Llamamos unión de dos conjuntos A y B, y escribimos $A \cup B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B.

  $A \cup B = \{x |\ x \in A \text{ o } x \in B\}$

- Llamamos intersección de dos conjuntos A y B, y escribimos $A \cap B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.

  $A \cap B = \{x |\ x \in A \text{ y } x \in B\}$

- Llamamos diferencia de dos conjuntos A y B, y escribimos $A - B$ o $A \setminus B$, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen B.

  $A \setminus B = \{x |\ x \in A \text{ y } x \notin B\}$

  $A - B = \{x |\ x \in A \text{ y } x \notin B\}$

  Ejemplo:

  Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

  entonces:

  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

  $A \cap B = \{2\}$

  $A - B = \{1, 3\}$ o $A \setminus B = \{1, 3\}$

- Llamamos conjunto vacío a aquel que no tiene elementos. Lo representamos con el símbolo $\emptyset$.

Unión e intersección de intervalos

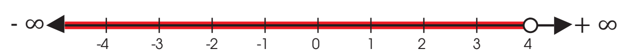
Puesto que los intervalos son conjuntos de números, podemos utilizar los símbolos $\cup$ y $\cap$ para expresar el conjunto formado por varios intervalos ($\cup$) o el conjunto de los puntos que son comunes a varios intervalos ($\cap$). Veamos un ejemplo.

Ejemplo 9

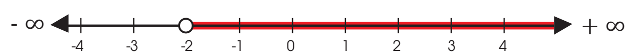
Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \ /\ x < 4\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \ /\ x > -2\}$, escribimos los intervalos correspondientes a estos conjuntos y expresamos, mediante intervalos, $A \cup B$, $A \cap B$, $B - \{1\}$ y $A \cap B - \{1\}$.

Tenemos:

$A = (-\infty, 4)$

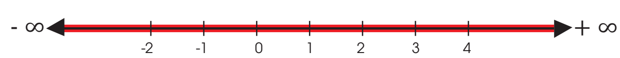


$B = (-2, +\infty)$

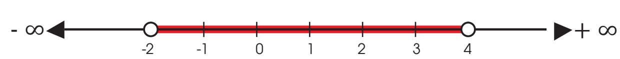


Los intervalos pedidos son, respectivamente:

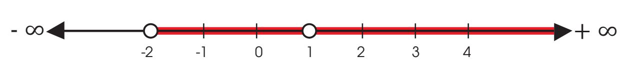
$A \cup B = (-\infty, 4) \cup (-2, +\infty) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$



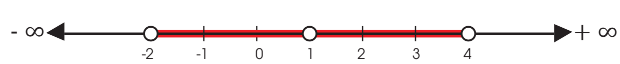
$A \cap B = (-\infty, 4) \cap (-2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ -2 < x < 4\} = (-2, 4) = E_3(1)$



$B - \{1\} = (-2, +\infty) - \{1\} = (-2, 1) \cup (1, +\infty)$



$A \cap B - \{1\} = (-2, 4) - \{1\} = (-2, 1) \cup (1, 4) = E_3{}^*(1)$



Actividades

21. **Ordena** de menor a mayor los siguientes números:

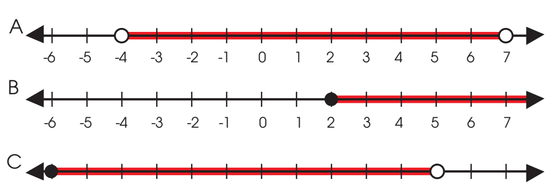
$$-1 \qquad 9 \qquad \frac{1}{3} \qquad -\sqrt{2} \qquad \pi \qquad \sqrt{3}$$

22. **Escribe** el conjunto de números reales que corresponden a cada uno de los siguientes intervalos y represéntalos:

$(-\sqrt{2}, 3)$; $(0, 5]$; $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$; $\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right]$; $(4, +\infty)$

23. **Expresa** los intervalos que corresponden a estos gráficos:

–**Halla** $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$

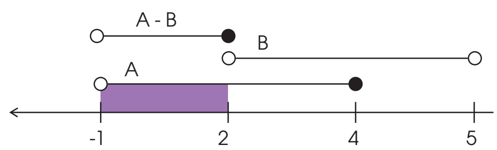


1.11. Operaciones con intervalos, diferencia y complemento

La operación diferencia de dos intervalos es otro intervalo que contiene los elementos que pertenecen al primero pero NO al segundo. Gráficamente, a la solución la encontramos localizando los intervalos en una recta real y resaltando el primero con líneas inclinadas en un sentido y el segundo con líneas en sentido contrario. El intervalo solución (I_s) corresponde a la parte «rayada» con la inclinación del primero.

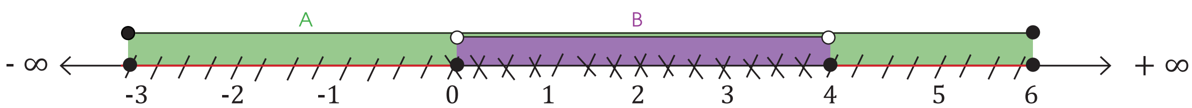
Ejemplo 10

Si $A = (-1; 4]$ y $B = (2; 5)$. Calculamos A - B



Ejemplo 11

Calculemos el I_s de: A - B (Leemos A diferencia B), si y $A = [-3, 6]$ y $B = (0,4)$

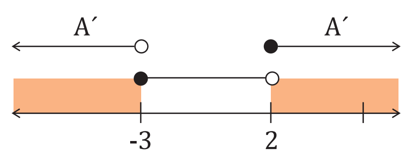


Con rayas inclinadas como el primero está de -3 y de 4 a 6; por lo tanto, estos son los intervalos solución.
Los límites deben pertenecer al primero: $-3 \epsilon A$, $0 \epsilon A$, $4 \epsilon A$ y $6 \epsilon A$, I_s en notación de intervalo: $[-3;0] \cup [4;6]$

La operación complemento de un intervalo es otro intervalo que contiene los elementos que le faltan para completar el conjunto universal, que en este caso es la recta real. Gráficamente, a la solución lo encontramos al localizar el intervalo en una recta real y resaltar los faltantes con líneas en el mismo sentido. El intervalo solución corresponde a la parte «rayada».

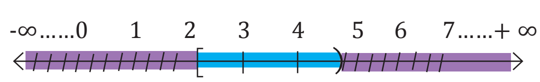
Ejemplo 12

1. Si $A = [-3; 2)$. Calculamos A´



$A´= (-\infty;-3) \cup [2;+\infty)$

2. Hallemos el A´ del intervalo: $A = [2,5)$



I_s en notación de intervalo: $(+\infty, -2) \cup [5, +\infty)$

Actividades

24. **Calcula**:

a. $(-\infty, 3) - (-7; -4)$
b. $(-2; 2] - (1; 6)$
c. $(-1; 0) - (2; 3)$
d. $(-\infty; 2) - [1; 3]$
e. $(-6, 8) \cup (-2, 9)$
f. $[-3, 2] \cap (3, 8)$
g. $[-3, 7) \cap (-2, 8)$
h. $(-4, 4] \cup (-\infty, 1)$

25. Sea $A = [-3, 10)$ y $B = (-1, 12]$, **halla**:

a. $A \cup B$ b. $A \cap B$ c. A- B d. B - A e. A´ - B f. B´ - A

Y TAMBIÉN: ¿?

La distancia aproximada de la Tierra a la Luna es de 384 400 km, por lo cual la luz tarda en rebotar de la luna a la tierra un segundo aproximadamente. La velocidad de la luz en el vacio es de 300 000 km/s.

http://goo.gl/fWy106

1.12. Valor absoluto y distancia

Todo número real **a** lleva asociado una magnitud que indica la amplitud del intervalo que tiene como extremos 0 y **a**.

> El valor absoluto de **a** es igual al propio valor **a** si este es positivo, o a su opuesto, - **a**, si es negativo. Lo escribimos **|a|**.

El valor absoluto de 4 y - 4, por ejemplo, es 4.

Podemos extender el concepto de valor absoluto para definir la distancia entre dos números reales **a** y **b** cual quiera:

> La distancia entre a y b es el valor absoluto de la diferencia entre ambos números: $d\,(a, b) = |b - a|$.

Por lo tanto, $d\,(a, b)$ es la amplitud de un intervalo de extremos a y b, mientras que el valor absoluto de un número corresponde a su distancia al número 0.

Por ejemplo, la distancia entre -3 y 5 es:

$$d\,(-3, 5) = |5 - (-3)| = |5 + 3| = 8$$

Propiedades del valor absoluto

- Los números opuestos tienen igual valor absoluto. $|a| = |-a|$.

$$|5| = |-5| = 5$$

- El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

$$|\,(-3) \cdot 5| = |\,(-3)| \cdot |5|$$
$$|-15| = |3| \cdot |5|$$
$$15 = 15$$

- El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

$$\left|\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\left(-\frac{3}{4}\right)\right| \qquad \left|\left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\left(-\frac{3}{4}\right)\right| \qquad \frac{1}{4} \leq \frac{7}{4}$$

Actividades

26. **Escribe** de forma simbólica y **representa** gráficamente estos intervalos:

   a. $\{x \mid x \leq 2\}$
   b. $\{x \mid -1 < x \leq 5\}$

—¿Cuál es la distancia entre los puntos $x = 1$ y $x = 5$?

27. **Halla** el valor absoluto y la distancia entre:

$$a=\sqrt{2} \;\text{ y }\; b=-\frac{7}{5}$$

2. LOGARITMOS

Seguramente habrás oído hablar de una propiedad de las sustancias llamada pH.

Si una sustancia tiene pH igual a 7 decimos que es neutra, si su pH es mayor que 7 decimos que tiene carácter básico y si es menor que 7, carácter ácido.

Al pH definimos como el negativo del logaritmo de la concentración de iones hidrógeno, cambiado de signo. El hidrógeno es un tipo de átomo; la concentración es la cantidad que existe en un volumen de disolución, pero, ¿qué es el logaritmo?

El logaritmo es un concepto matemático relacionado con las potencias.

Observa esta tabla. Si tenemos la base y el exponente de una potencia, podemos calcular rápidamente el valor de dicha potencia.

Base	Exponente (a)	Potencia (x)
10	1	10
10	2	100
10	3	1 000
10	0	1
10	-1	0,1
10	-2	0,01

Tabla 10

Y TAMBIÉN: ¿?

El concepto de pH aparece en diferentes productos. Por ejemplo, se acepta que para que el agua de una piscina sea apta para el baño, debe poseer un pH comprendido entre 7, 2 y 7, 4; un limpiador tiene *pH* básico; el jugo de una fruta *pH* ácido...

$$pH = -\log [H^+]$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Los logaritmos de base 10 también reciben el nombre de logaritmos decimales.

El logaritmo decimal de x, log *x*, es el número al que debemos elevar 10 para que nos dé x.

$$10^a = x \Leftrightarrow \log x = a$$

Sin embargo, en determinados cálculos con potencias, lo que nos interesa conocer es el exponente al que hay que elevar la base para obtener la potencia.

Llamamos logaritmo en base 10 de un número real x a otro número real a de manera que $10^a = x$. Lo expresamos como $\log_{10} x = a$, o simplemente $\log x = a$.

Así:

- Puesto que $10^2 = 100$, se tiene $\log 100 = 2$.
- Puesto que $10^{-1} = 0{,}1$, se tiene $\log 0{,}1 = -1$.

Observa que el logaritmo de una potencia de base 10 es igual al exponente de la potencia:

$10^a = x \Leftrightarrow \log x = a$						
x	10	100	1 000	1	0,1	0,01
log x	1 puesto que $10^1 = 10$	2 puesto que $10^2 = 100$	3 puesto que $10^3 = 1\,000$	0 puesto que $10^0 = 1$	-1 puesto que $10^{-1} = 0{,}1$	-2 puesto que $10^{-2} = 0{,}01$

Tabla 11

Actividades

28. **Calcula**, aplicando la definición, los siguientes logaritmos.

a. log 10 000 ; b. log 10 ; c. log 10^{-2}; d. log 0,0001; e. log 1 000 000

—**Comprueba** que estos resultados son iguales a los que obtienes utilizando la calculadora.

CALCULADORA

Para calcular log 9:

— Introducimos el número 9 y pulsamos la tecla log.

9 log 0.9542425

El número 0,954 2425 que aparece en pantalla es el log 9.

2.1. Cálculo de logaritmos

Veamos cómo puede calcularse el logaritmo de un número que no es potencia de 10; por ejemplo, log 9.

$$10^a = 9 \Leftrightarrow \log 9 = a$$

Puesto que 9 no es una potencia de 10, no podemos calcular de forma inmediata su logaritmo. Así pues, obtendremos el resultado por ensayo-error, mediante tablas de logaritmos, o bien al utilizar una calculadora.

- Las tablas de logaritmos son tablas que permiten calcular el valor de cualquier logaritmo con una cierta precisión. Consisten en varias filas y columnas de números que expresan la parte decimal del logaritmo o mantisa. Su uso era habitual años atrás, antes de que se extendiera el uso de la calculadora científica. Hoy en día, han quedado en desuso.
- Actualmente, el sistema más empleado para calcular logaritmos es la calculadora científica, que nos permite calcular log 9 de una manera rápida.

  log 9 = 0,954242...

2.2 Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos presentan una serie de propiedades que podemos deducir de su definición. **Fíjate** en la tabla siguiente.

Logaritmo de un producto	Logaritmo de un cociente
El logarítmo del producto de dos números reales x e y es igual a la suma de los logaritmos de dichos números. $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$ Demostración Sean a y b los logaritmos de x e y, respectivamente $\log x = a;\ \log y = b$ Por la definición de logaritmo, tenemos que: $\log x = a \Leftrightarrow x = 10^a;\ \log y = b \Leftrightarrow y = 10^b$ $x \cdot y = 10^a \cdot 10^b = 10^{a+b} \Rightarrow$ $\Rightarrow \log(x \cdot y) = a + b = \log x + \log y$	El logaritmo del cociente de dos números reales x e y es igual a la diferencia de los logaritmos de dichos números. $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ Demostración Sean a y b los logaritmos de x e y, respectivamente. $\log x = a;\ \log y = b$ Por la definición de logaritmo, tenemos que: $\log x = a \Leftrightarrow x = 10^a;\ \log y = b \Leftrightarrow y = 10^b$ $\frac{x}{y} = 10^{a-b} \Rightarrow \log\left(\frac{x}{y}\right) = a - b = \log x - \log y$
Logaritmo de una potencia	**Logaritmo de un cociente**
El logaritmo de la potencia de base el número real x y exponente el número real y es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base. $\log x^y = y \cdot \log x$ Demostración Sean $a = \log x$ Por definición de logaritmo, tenemos que $10^a = x$. De aquí deducimos: $x^y = (10^a)^y = 10^{ay} \Rightarrow \log x^y = a \cdot y = y \cdot \log x$	El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz. $\log \sqrt[n]{x} = \frac{\log x}{n}$ Demostración **Observa** que si expresamos $\sqrt[n]{x}$ como $x^{\frac{1}{n}}$ y aplicamos la propiedad anterior, obtenemos: $\log \sqrt[n]{x} = \log x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log x = \frac{\log x}{n}$

Tabla 12

Las propiedades de los logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de una expresión como sumas y restas de logaritmos.

Sepamos con un ejemplo cómo hacerlo.

Ejemplo 13

Expresamos como sumas y restas de logaritmos: $\log\left(\frac{7\cdot x}{6}\right)^3$

$$\log\left(\frac{7\cdot x}{6}\right)^3 = 3\ \log\frac{7\cdot x}{6} = 3\cdot[\log(7\cdot x) - \log 6]$$

$$= 3\ (\log 7 + \log x - \log 6)$$

2.3. Logaritmos en bases distintas de 10

Es posible calcular logaritmos que no sean decimales. Así, podemos plantearnos a qué potencia hemos de elevar 2 para obtener 8; es decir, cuál es el logaritmo en base 2 de 8.

$\log_2 8 = ?$

La respuesta será 3, porque $2^3 = 8$.

Podemos definir el logaritmo en cualquier base positiva b diferente de 10 de un número real x como otro número real **a** tal que:

$$b^a = x \Leftrightarrow \log_b x = a$$

Ejemplo 14

$\log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$

$\log_5 0{,}04 = -2 \Leftrightarrow 5^{-2} = 0{,}04$

$\log_7 16\,807 = 5 \Leftrightarrow 7^5 = 16\,807$

Y TAMBIÉN: ¿?

Generalización de las propiedades

Las propiedades de los logaritmos son igualmente válidas si utilizamos una base distinta de 10.
Para una base b (b > 0, b = 1), las propiedades que hemos visto se escriben:

- $\log_b (x\cdot y) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b x^y = y\ \log_b x$
- $\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{\log_b x}{n}$

Y TAMBIÉN: ¿?

Podemos cambiar la base de los logaritmos utilizando la siguiente propiedad:

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$$

Así, si sabemos que $\log_{10} 5 = 0{,}699$ y $\log_{10} 3 = 0{,}477$, podemos calcular $\log_3 5$:

$$\log_3 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}$$

$$= \frac{0{,}699}{0{,}477} = 1{,}465$$

Actividades

29. **Expresa** como sumas y restas de logaritmos.

a. $\log \frac{27a}{b}$

b. $\log \left(\frac{3}{x}\right)^5$

c. $\log \frac{5x}{7 - x}$

d. $\log \left(\frac{27}{\sqrt{15z}}\right)$

e. $\log \left(\frac{10x}{9y}\right)^2$

f. $\log \sqrt{\frac{8x}{9}}$

30. Si log a = 3 y log b = 4, **calcula**:

a. $\log (a \cdot b)$

b. $\log \frac{a}{b}$

c. $\log a^2$

d. $\log_a b$

3. OPERACIONES CON POLINOMIOS

A la derecha hay representadas tres figuras geométricas de altura x: un cuadrado, un triángulo y un rectángulo. EL área de cada una de ellas podemos expresarla de la siguiente manera:

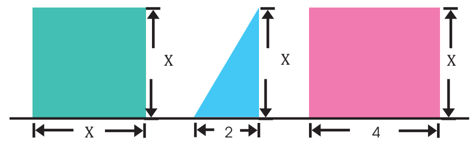


figura 1

$A_{cuadrado} = x^2$; $A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = x$; $A_{rectángulo} = 4 \cdot x$; x esta expresado en metros.

Y el área total será la suma de las tres áreas. A total $= x^2 + x + 4\,x = x^2 + 5x$

La expresión algebraica que hemos obtenido, $x^2 + 5x$, recibe el nombre de polinomio.

Definición de polinomio

Un polinomio en una variable x es una expresión algebraica que puede reducirse a la forma $a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0$, en la que a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0 son números reales y n es un número natural.

Y TAMBIÉN: ¿?

Monomio

Un monomio es una expresión algebraica que consta de una variable literal, con un exponente natural, multiplicado por un coeficiente numérico (número real).

variable literal

$-5\,x^3$

Coeficiente numerico

Exponente

Veamos algunas características del polinomio que hemos obtenido.

- El polinomio $A(x) = x^2 + 5x^1$, es de grado 2, puesto que este es el mayor de los grados de sus términos, entendiendose grado al exponente de la variable x.

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus términos.

- En caso de que la altura de las figuras sea $x = 2metros$, podemos calcular fácilmente la suma de las áreas. Para ello, basta sustituir este valor de la x en la expresión polinómica $A(x) = x^2 + 5x$ y operar.

  $A\,(2m) = (2m)^2 + 5 \cdot (2m) = 4m^2 + 10m^2 = 14m^2$

  Así pues, si la altura es $2m$, la suma de las áreas es de $14\ m^2$.

El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la indeterminada x por el número a y efectuar las operaciones indicadas. Se representa por $P\,(a)$.

Después de sumar las áreas, hemos agrupado y reducido los términos semejantes y hemos ordenado los términos resultantes de mayor a menor. Así pues, decimos que el polinomio $A(x) = x^2 + 5x$ está ordenado y reducido.

- El polinomio $A(x) = x^2 + 5x$ carece de término independiente (de grado 0). Al no tener términos de cada uno de los grados menor o igual que 2, decimos que el polinomio es incompleto.

Actividades

31. **Escribe** el grado y el término independiente de cada uno de los siguientes polinomios:

    a. $P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7$

    b. $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x + 1$

32. **Calcula** el valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = 2$ y el de $Q(x)$ para $x = -3$.

33. **Reduce** y ordena estos polinomios:

    a. $P(x) = 6x^4 - 11x^2 - 3x^2 + 3 - 8x^2 + 3x^3$

    b. $Q(x) = 3x^3 + 12x^2 - 2\,x^3 + 6 - 3x + 2x$

    c. $R(x) = 2x^4 - 4x + 4\,x^3 - 8 + 2x^2 - 4x$

    —A continuación, **indica** si son completos o incompletos.

3.1 Suma, resta y multiplicación de polinomios

Observa el siguiente cuadro y recuerda cómo se efectúan la suma, la resta y la multiplicación de polinomios.

Suma de polinomios	
Procedimiento	Ejemplo
Para sumar dos polinomios, sumamos los monomios semejantes de cada uno de ellos: • Escribimos los dos polinomios uno debajo del otro de modo que los monomios semejantes estén en la misma columna. • Sumamos los monomios semejantes. El resultado es un polinomio de grado menor o igual que el mayor de los grados de los polinomios iniciales.	Sumemos los polinomios $P(x)=5x^3+3x^2-3x+4$ $Q(x)=-4x^3+2x-6$ $\begin{array}{r} 5x^3+3x^2-3x+4 \\ -4x^3 \quad\quad +2x\ -6 \\ \hline x^3+3x^2-x\quad -2 \end{array}$ $P(x)+Q(x)=x^3+3x^2-x-2$
Resta de polinomios	
Procedimiento	Ejemplo
Para restar dos polinomios, restamos los monomios semejantes de cada uno de ellos: • Escribimos los dos polinomios uno debajo del otro de modo que los monomios semejantes estén en la misma columna. • Cambiamos el signo de todos los monomios del sustraendo y a continuación sumamos los semejantes. El resultado es un polinomio de grado menor o igual que el mayor de los grados de los polinomios iniciales.	Restemos los polinomios $P(x)=5x^3+3x^2-3x+4$ $Q(x)=-4x^3+2x-6$ $\begin{array}{r} 5x^3+3x^2-3x+4 \\ 4x^3 \quad\quad -2x+6 \\ \hline 9x^3+3x^2-5x+10 \end{array}$ $P(x)-Q(x)=9x^3+3x^2-5x+10$
Multiplicación de polinomios	
Procedimiento	Ejemplo
Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos el primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo y después sumamos los polinomios resultantes: • Escribimos los dos polinomios uno debajo del otro. • Debajo, y en filas diferentes, escribimos los polinomios resultantes de multiplicar el primer polinomio por cada uno de los monomios de que consta el segundo polinomio. • Sumamos los polinomios obtenidos. El resultado es un polinomio de grado igual a la suma de los polinomios iniciales.	Multiplicamos los polinomios $P(x)=5x^3+3x^2-3x+4$ $Q(x)=-4x^3+2x-6$ $\begin{array}{r} 5x^3+3x^2-3x\quad +4 \\ -4x^3+2x\quad -6 \\ \hline -30x^3-18x^2+18x-24 \\ 10x^4+6x^3-6\ x^2+\ 8x \quad\quad \\ -20x^6-12x^5+12x^4-16x^3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline -20x^6-12x^5+22x^4-40x^3-24x^2+26x-24 \end{array}$ $P(x) \bullet Q(x)$ $=-20x^6-12x^5+22x^4-40x^3-24x^2+26x-24$

Tabla 13

Actividades

34. $P(x) = 6x^3 - 3x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x^2 + 2x + 4$, **calcula**:

a. $P(x) + Q(x)$

b. $Q(x) - P(x)$

c. $P(x) \,.\, Q(x)$

d. $(Q(x))^3$

3.2. División de polinomios

Observa ahora la forma en que procederemos para dividir polinomios.

Procedimiento	Ejemplo
Escribimos los dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de x. Si el polinomio dividendo es incompleto, ponemos ceros en blanco correspondientes a los términos que faltan.	Dividimos el polinomio $3x^5+2x^3-x^2-4$ entre el polinomio x^3+2x^2+1 $3x^5+2x^3-x^2-4 \qquad \underline{\vert\; x^3+2x^2+1}$
Dividimos el primer monomio del dividendo (en este caso $3x^5$) entre el primer monomio del divisor. Multiplicamos el cociente obtenido por el divisor y escribimos el opuesto del resultado.	$3x^5+0x^4+2x^3-x^2+0x-4 \qquad \underline{\vert\; x^3+2x^2+1}$ $-3x^5-6x^4 \quad -3x^2 \qquad\qquad 3x^2$
Restamos el producto obtenido del dividendo. Ello equivale a sumar el opuesto.	$3x^5+0x^4+2x^3-x^2+0x-4 \qquad \underline{\vert\; x^3+2x^2+1}$ $\underline{-3x^5 \quad -6x^4 \quad -3x^2} \qquad\qquad 3x^2$ $-6x^4+2x^3-4x^2$
Bajamos el siguiente término del dividendo, en nuestro caso no hay, y repetimos el mismo proceso.	$3x^5+0x^4+2x^3-x^2+0x-4 \qquad \underline{\vert\; x^3+2x^2+1}$ $\underline{3x^5 \quad -6x^4 \quad -3x^2} \qquad\qquad 3x^2-6x$ $-6x^4+2x^3-4x^2$ $\underline{+6x^4+12x^3 \quad +6x}$
El proceso continúa hasta que obtenemos un resto de grado menor que el grado del divisor. En el ejemplo, el grado del divisor es 3 y hemos obtenido un resto de grado 2.	$3x^5+0x^4+2x^3-x^2+0x-4 \qquad \underline{\vert\; x^3+2x^2+1}$ $\underline{3x^5-6x^4 \quad -3x^2} \qquad\qquad 3x^2-6x+14$ $-6x^4+2x^3 \quad -4x^2$ $\underline{+6x^4+12x^3 \quad +6x}$ $14x^3 \quad -4x^2+6x \quad -4$ $\underline{-14x^3 \quad -28x^2 \quad -14}$ $-32x^2+6x-18$

Tabla 14

Observa que el grado del polinomio en el cociente es igual a la diferencia entre los grados de los polinomios del dividendo y el divisor.

Como en toda división numérica, en la división de polinomios también se verifica la igualdad:

Dividendo = divisor . cociente + resto

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Actividades

35. **Efectúa** la siguiente división de polinomios:

$$(2x^4 - 5x^3 - 7x + 5) : (x^2 - 2x + 2)$$

—**Comprueba** que se verifica la igualdad: Dividendo = divisor . cociente + resto

36. **Efectúa** estas divisiones:

a. $(x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x + 12) : (x^2 + x - 6)$

b. $(-2x^3 + 3x - 5) : (x^2 + x - 2)$

c. $(2x^4 + 22x^3 - 58x^2 - 2x - 40) : (x^2 + 6x - 5)$

3.3. Método de Ruffini

Vamos a estudiar la división de polinomios en caso de que el polinomio divisor sea de la forma $x - a$, en la que $a \in \mathbb{R}$.

Observa en el ejemplo a continuación, la división del polinomio $P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 2$ entre el polinomio $Q(x) = x - 3$.

Este tipo de divisiones puede realizarse de una forma más simple y rápida aplicando la llamada regla de Ruffini.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & \boxed{-\ 4x^2} & & +\ 2 & x - 3 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & \boxed{+\ 18x^2} & & & 6x^2 + 14x + 42 \\ \cline{1-2}
 & \boxed{14x^2} & & & \\
 & -14x^2 & \boxed{+\ 42x} & & \\ \cline{2-3}
 & & \boxed{42x} & +\ \boxed{2} & \\
 & & -42x & +\ \boxed{126} & \\ \cline{3-4}
 & & & \boxed{128} &
\end{array}
$$

Veamos cómo se utiliza esta regla para efectuar esta misma división.

<table>
<tr><th>Procedimiento</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Escribimos los coeficientes de los términos del dividendo uno a continuación del otro. Si el polinomio dividendo es incompleto, ponemos un 0 en el lugar correspondiente a cada término que falte.</td><td>Dividimos $6x^3 - 4x^2 + 2$ entre $x - 3$.
$$\begin{array}{cccc} 6 & -4 & 0 & 2 \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>Escribimos el término independiente del divisor cambiado de signo a la izquierda de estos coeficientes.</td><td>$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>Bajamos el primer coeficiente, 6, que se multiplica por 3 y el resultado, 18, se suma al segundo coeficiente del dividendo.</td><td>$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & \boxed{-4} & 0 & 2 \\ 3 & \otimes & \boxed{18} \ \oplus & & \\ \hline & 6 & \boxed{14} & & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>La suma obtenida, 14, se multiplica por 3 y el resultado se suma el tercer coeficiente del dividendo.</td><td>$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & -4 & \boxed{0} & 2 \\ 3 & \otimes & 18 & \boxed{42} \ \oplus & \\ \hline & 6 & 14 & \boxed{42} & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>Continuamos este proceso hasta que se acaben los coeficientes de los términos del polinomio dividendo.</td><td>$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & -4 & 0 & \boxed{2} \ \oplus \\ 3 & \otimes & 18 & 42 & \boxed{126} \\ \hline & 6 & 14 & 42 & \boxed{128} \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>El último resultado obtenido, 128, es el resto de la división, los restantes (6, 14, 42) son los coeficientes del polinomio cociente. Tendremos en cuenta que el grado del coeficiente es inferior en una unidad al grado del dividendo, pues el divisor es de grado 1</td><td>$R = 128$
$C(x) = 6x^2 + 14x + 42$</td></tr>
</table>

Tabla 15

Puedes observar que los rectángulos resaltados en rojo encierran los mismos números en los dos métodos utilizados para efectuar la división.

	1	5	-2	-24
3		3	24	66
	1	8	22	42

	1	5	-2	-24
-4		-4	-4	24
	1	1	-6	0

Y TAMBIÉN: ¿?

El número real a es un cero o raíz del polinomio: $P(x)$ si $P(a) = 0$.

3.4. Teorema del residuo

Veamos ahora un método para hallar el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre x - a sin necesidad de realizarla.

Observa en el margen la división del polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ entre $x - 3$. El resultado obtenido nos permite escribir:

$P(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 8x + 22) + 42$

Al sustituir en esta igualdad x por 3; es decir, al calcular el valor numérico de $P(x)$ para $x = 3$ obtenemos:

$P(3) = (3 - 3) \cdot (3^2 + 8 \cdot 3 + 22) + 42$

No es necesario calcular el segundo paréntesis, puesto que está multiplicado por 0.

$P(3) = 0 \cdot (32 + 8 \cdot 3 + 22) + 42 = 0 + 42, \quad P(3) = 42$

El resto de la división del polinomio $P(x)$ entre x - a es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ para x = a.

Observa que, al dividir el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ entre $x + 4$, obtenemos 0 de resto. Por lo tanto, el valor numérico del polinomio para $x = -4$ es 0.

Dicho de otro modo, como $P(x)$ es divisible por $x + 4$, podemos concluir que -4 es una raíz de $P(x)$.

Si el polinomio $P(x)$ es divisible por x - a, de manera exacta, entonces a es una raíz del polinomio $P(x)$.

3.5. Teorema del factor

El teorema del factor es una consecuencia inmediata del teorema del resto:

Un polinomio $P(x)$ tiene un factor $(x - a)$, si y solo si $x = a$ es una raíz de P. Es decir $P(a) = 0$.

Así, el polinomio $P(x)$ puede expresarse de la forma $P(x) = (x - a) \cdot C(x)$, donde $(x - a)$ es un factor de $P(x)$.

Ejemplo 15

Comprueba si (x + 2) es un factor de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

Comprensión: Calculamos el valor numérico de x = - 2 en los polinomios.

Resolución: a) $P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 2 + 2 = 0 \rightarrow (x + 2)$ es un factor de $P(x)$. Para hallar el otro factor, dividiremos, en este caso, aplicando la regla de Ruffini:

	1	2	1	2
-2		-2	0	-2
	1	0	1	0

↓

$P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 + 1)$

Actividades

37. **Utiliza** la regla de Ruffini para averiguar si los siguientes polinomios son divisibles por x + 5:

    a. $x^3 + 10x^2 + 3x - 54$

    b. $2x^4 + 3x^3 - 35x^2 + 9x + 45$

38. **Escribe** un polinomio que sea simultáneamente múltiplo de $x + 4$ y de $2x^2 + 3x - 2$.

39. **Halla** el valor numérico de $3x^3 + 4x^2 - 17x - 6$ para $x = 5, x = -3, x = -4$

40. **Justifica** la siguiente afirmación utilizando la regla de Ruffini: Para que un polinomio de coeficientes enteros, $P(x)$, sea divisible por x - a, a debe ser divisor del término independiente de $P(x)$.

    a. ¿Es divisible $x^2 + 3x - 15$ por x - 4?

    b. El polinomio $x^2 + 3x - 15$, ¿puede ser divisible por x - 3? **Compruébalo.**

    c. El polinomio $2x^2 - 5x - 6$, ¿puede ser divisible por x - 3? **Compruébalo.**

41. ¿Puede ser x = 6 raíz del polinomio $x^2 + 3x - 15$?

Problemas resueltos

A

1. En una división de polinomios, $x^3 + 2x^2 + x - 5$ **es el dividendo, el cociente,** $x - 2$ **y el resto,** 13**.**
¿Cuál es el divisor de esta división?

Solución

Comprender

- **Vuelve** a leer atentamente el enunciado y **anota** los datos del problema.

Planificar

- Se trata de una división entera en la que se cumple: Dividendo = divisor . cociente + resto.

  En esta igualdad conocemos todos los polinomios excepto el divisor.

Ejecutar el plan

- Expresamos por $P(x)$ el divisor y sustituimos los datos del ejercicio en la igualdad anterior.

  $x^3 + 2x^2 + x - 5 = P(x) . (x - 2) + 13$

- Restamos 13 a cada uno de los miembros:

  $x^3 + 2x^2 + x - 5 - 13 = P(x) . (x - 2) + 13 - 13$

  $x^3 + 2x^2 + x - 18 = P(x) . (x - 2)$

- Dividimos ambos miembros por $x - 2$.
- Efectuamos la división $(x^3 + 2x^2 + x - 18) : (x - 2)$ aplicando la regla de Ruffini.

	1	2	1	-18
2		2	8	18
	1	4	9	0

  Por lo tanto, el divisor de la división es:

  $P(x) = x^2 + 4x + 9$

Revisar

- Para comprobar el resultado obtenido efectuamos la división de $x^3 + 2x^2 + x - 5$ entre $x^2 + 4x + 9$ y verificamos que nos da $x - 2$ de cociente y 13 de resto.

B

1. Considera el polinomio $x^3 + x^2 - 9x + k$.
¿Cuál debe ser el valor de k **para que** $x + 1$ **sea divisor de dicho polinomio?**

Solución

Comprender

- **Vuelve** a leer atentamente el enunciado y **anota** los datos del problema.
- ¿Qué significa que $x + 1$ sea divisor del polinomio $x^3 + x^2 - 9x + k$?

Planificar

- Para que $x + 1$ sea divisor de $x^3 + x^2 - 9x + k$, debe cumplirse que el resto de la división,

  $(x^3 + x^2 - 9x + k) : (x + 1)$, sea 0.

Ejecutar el plan

- Efectuamos la división utilizando la regla de Ruffini y dejando k indicado.

	1	1	-9	k
-1		-1	0	9
	1	0	-9	k + 9

- Puesto que el resto debe ser 0, debemos resolver: $k + 9 = 0$

  Con lo que el valor buscado de k es -9.

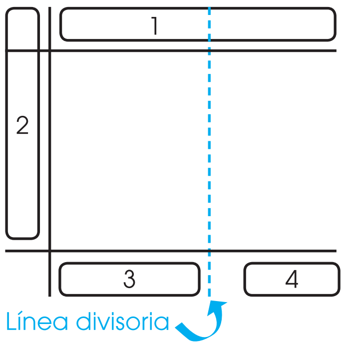
Revisar

- Podemos comprobar que el divisor del polinomio $x^3 + x^2 - 9x - 9$ es $x + 1$ si efectuamos la división correspondiente y verificamos que el resto obtenido es 0.

	1	1	-9	-9
-1		-1	0	9
	1	0	-9	0

Y TAMBIÉN: ¿?

A la línea divisora la colocamos separando tantos términos de la parte final del dividendo como grado del divisor.



3.5. Método De Hörner

1. Colocamos los coeficientes del dividendo completo y ordenado de forma descendente.
2. Colocamos los coeficientes del divisor todos cambiados de signos menos el primero que lo conserva, también, ordenados de forma descendente
3. Colocamos los coeficientes del cociente. Calculamos cada uno dividiendo la suma de la columna respectiva entre el primero coeficiente del divisor.
4. Colocamos los coeficientes del resto. El número de columnas está dado por el grado del divisor.

Ejemplo 16

Dividimos:

a. $\dfrac{6x^6 + x^5 - 2x^3 + 3x^2 - x + 4}{3x^3 - x^2 + 2x + 1}$ b. $\dfrac{2x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 4x + 8}{2x^2 + x - 2}$

Solución:
Ordenemos y completemos

a.

3	6	1	0	-2	3	-1	4
1		2	-4	-2			
-2			1	-2	-1		
-1				-1	2	1	
					$-\frac{7}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{7}{3}$
	2	1	-1	$-\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{19}{3}$

Cociente: $C(x) = 2x^3 + x^2 - x - \frac{7}{3}$; Residuo: $R(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{14}{3}x + \frac{19}{3}$

b.

2	2	5	-2	4	8
-1		-1	2		
2			-2	4	
				1	-2
	1	2	-1	9	6

Cociente: $C(x) = x^2 + 2x - 1$; Residuo: $R(x) = 9x + 6$

TIC

Si accede a la página http://schollaris.com.mx/010105teoremares.php, podrás utilizar la calculadora de división sintética para verificar el teorema del resto. Demuestra que, efectivamente, al dividir el polinomio $P(x)=x^8-3x^5+5x-7$ entre $x+1$ el residuo que muestra la calculadora se corresponde con $P(-1)$.

Actividades

42. **Divide** los siguientes polinomios:

a. $\dfrac{8x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 7x + 1}{4x^2 + x - 2}$ b. $\dfrac{6x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5}{3x + 2}$ c. $\dfrac{6x^4 - x^3 + x^2 - 5x + 1}{2x - 1}$

4. ECUACIONES E INECUACIONES

4.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto

Una ecuación de valor absoluto es aquella que tiene la incógnita dentro de un valor absoluto.

Valor absoluto de un número real x, se escribe $|x|$, es el mismo número x cuando es positivo o cero, y opuesto de x, si x es negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

La resolución de ecuaciones de primer grado con valor absoluto, requiere de dos procedimientos (Caso 1 y Caso 2), en que utilizamos las mismas leyes de una ecuación lineal normal.

Para eliminar el símbolo del valor absoluto cuando entre las barras hay una expresión en una variable debemos tomar en cuenta los valores de la variable que hacen que la expresión sea positiva y los valores de este literal en que la expresión sea negativa.

Las soluciones de una ecuación de la forma $|ax + b| = c$, donde $a \neq 0$ y c es un número positivo, son aquellos valores que satisfacen: $ax + b = c$ ó $ax + b = -c$.

Propiedades que ayudan a resolver ecuaciones

La idea de resolver ecuaciones con valores absolutos es transformar el problema en resolver ecuaciones sin valor absoluto. Para ello aplicaremos la definición y propiedades que enunciamos a continuación:

- Para cualquier número real x:
  a. $|x| \geq 0$
  b. $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$
  c. $|x|^2 = x^2$
  d. $\sqrt{(x^2)} = |x|$
  e. $-|x| \leq x \leq |x|$

- Para cualesquiera números reales x y a:

  f. $|x| = a \leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 & \text{(i)} \\ \text{y} & \\ \underset{\text{Caso 1}}{x = a} \text{ y/o } \underset{\text{Caso 2}}{x = -a} & \text{(ii)} \end{cases}$

Primero, trataremos ecuaciones con un solo valor absoluto y con la variable dentro del valor absoluto como $|x + 2| = 5$ o $|2x - 5| = 15$.

Ejemplo 17

Resolvamos la ecuación: $|2x-5|=15$

Apliquemos la propiedad f:

- La primera desigualdad es obvia ($15 \geq 0$), por (i)
- Por (ii), tenemos dos casos para analizar:

Caso 1 (x = a)

si $2x - 5 = 15$ entonces $x = 10$

Caso 2 (x = - a)

si $2x - 5 = -15$ entonces $x = -5$

Así, el conjunto solución de la ecuación resulta ser $S = \{-5, 10\}$

En este caso, el conjunto solución resulta ser un conjunto finito.

Actividades

43. **Resuelve** las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a. $|3x-5|=4$ b. $|5x-3|=\frac{2}{3}$ c. $\left|\frac{3x-2}{2} + 5\right| = 10$ d. $\left|\frac{x+3}{4} - \frac{1}{2}\right| = 3$

El método que aplicaremos también puede ser extendido a ecuaciones en que la variable también está fuera del valor absoluto como: $|2 - 3x| = x + 4$.

Ejemplo 18

Resolvamos la ecuación: $|2 - 3x| = x + 4$.

Al aplicar la propiedad f, tenemos las siguientes opciones.

$$|2 - 3x| = x + 4 \leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \quad \text{, por (i)} \\ \text{y} \\ \underbrace{|2 - 3x| = x + 4}_{\text{Caso 1}} \;\; \frac{\text{y}}{\text{o}} \;\; \underbrace{2 - 3x = -(x + 4)}_{\text{Caso 2}} \quad \text{, por (ii)} \end{cases}$$

Para la desigualdad (i), claramente x tiene que ser mayor que 4.

$x + 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -4 \quad \Rightarrow x \in [-4, +\infty[$, llamemos al intervalo anterior I.

Para (ii), tenemos dos casos para analizar.

Caso 1	**Caso 2**
$2 - 3x = x + 4$	$2 - 3x = -x - 4$
$4x = -2$	$2x = 6$
$x = -1/2$	$x = 3$

Tanto $x = -1/2$ como $x = 3$, pertenecen al intervalo I cumplen la desigualdad (i).

La solución es: $S = \{x / |2 - 3x| = x + 4\} = \{-1/2, 3\}$.

Y TAMBIÉN: ¿?

Una fracción...

- No está definida si el denominador es cero.
- Es cero si el numerador es cero.
- Es positiva si el numerador y el denominador son de igual signo.
- Es negativa si el numerador y el denominador son de diferente signo.

Actividades

44. **Resuelve** las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a. $|x - 1| = 2x - 1$

b. $2x + |x - 1| = 2$

c. $|3x + 7| = 5x + 13$

d. $|3x + 2| = 5 - x$

e. $|5x + 4| = 2x + 1$

f. $|-6x + 1| = 4x - 7$

g. $x + |1 + 2x| = -2$

h. $3|x + 4| - 2 = x$

i. $|5 - 2x| - 4 = 10$

j. $3 - 2x + |1 + x| = -5 + 6x$

k. $\left|\frac{1}{4} + 2x\right| = \frac{-1}{2} - x$

l. $|x - 1 + 2x - 3| = x + 2$

m. $|x - 6| = |5x + 8|$

n. $\left|\frac{1 + 4x}{3} - x\right| = 6$

Y TAMBIÉN: ¿?

A una inecuación la verificamos solo para algunos valores de las variables.
Los valores numéricos para los cuales verificamos la desigualdad son las soluciones de la misma.
Resolver una inecuación consiste en hallar los valores numéricos para los cuales la desigualdad es verdadera.

4.2. Inecuaciones fraccionarias

Observa la siguiente inecuación: $\dfrac{x+5}{x^2} \geq 0.$

En ella aparece una fracción algebraica con una incógnita.

Para resolver este tipo de inecuaciones, seguiremos estos pasos:

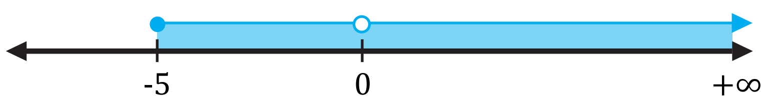
a. En primer lugar, estudiaremos para qué valores de x el numerador y el denominador son positivos o negativos, teniendo en cuenta que el denominador no puede tomar el valor cero.

$$x+5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -5 \ \text{ y } \ x^2 > 0\,;\ x \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad x \geq -5 \ \text{ y } \ (x<0 \vee x>0)$$

b. A continuación, aplicaremos la regla de signos para la división, a fin de determinar qué valores de x cumplen la desigualdad.

En nuestro caso, el conjunto solución serán los valores de x que hagan cero o positivo el numerador, pues el denominador será positivo para cualquier valor de x, excepto el valor cero, que deberemos excluir, pues el denominador no puede anularse.

La solución sería el siguiente intervalo: $S = x \in [-5, 0) \cup (0, +\infty)$



Ejemplo 19

Sea f una función tal que: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; determine el valor de x, para los cuales $\dfrac{x+1}{x-2} \geq 0$

Comprensión

Se trata de una inecuación fraccionaria, así que deberemos comparar los signos del numerador y del denominador, excluyendo el valor que anula el denominador.

Resolución

Resolvamos las ecuaciones: $x+1=0 \rightarrow x_1 = -1$

$x-2=0 \rightarrow x_2 = 2$

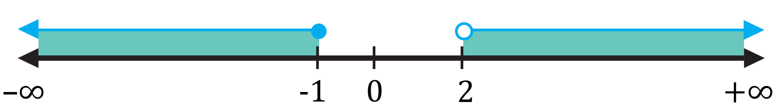
Estas soluciones definen tres intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Construyamos ahora la siguiente tabla para estudiar el signo que toman el numerador y el denominador. Para ello, basta con escoger un valor del intervalo y sustituir en las expresiones. En la última fila, apliquemos la regla de signos para la división.

	(-∞, - 1)	-1	(- 1, 2)	2	(2, +∞)
x + 1	-	0	+	+	+
x - 2	-	-	-	0	+
$\dfrac{x+1}{x-2}$	+	0	-	No existe	+

En la última fila de la tabla, vemos que la fracción algebraica se anula en $x = -1$ y es negativa en el intervalo abierto $(-1, 2)$.

La solución de la inecuación es: CS: $x \in (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$.



4.3. Inecuaciones de primer grado con una incógnita y con valor absoluto

Una inecuación con valor absoluto es aquella en la que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por el valor absoluto de la misma.

La forma general de una inecuación de primer grado con valor absoluto es $|ax+b|\geq c$, o todas sus equivalentes: $|ax+b|\geq c$, $|ax+b|<c$,o $|ax+b|>c$, donde $a,b \in R$ y $a\neq 0$.

Para resolver una inecuación con valor absoluto, aplicamos la definición de valor absoluto, que y en los casos en donde sea posible usar alguna de las propiedades estudiadas, con el objetivo de facilitar el procedimiento de resolución

Las propiedades de las desigualdades con valor absoluto quedan de estas formas:

a. $|x - a| \geq b$ equivale a: $x - a \leq -b$ ó $x - a \geq b$

b. $|x - a| \leq b$ equivale a: $-b \leq x - a \leq b$

TIC

La aplicación que encontrarás en el siguiente enlace resuelve sistemas lineales. Puedes utilizarla para comprobar si la solución de los ejercicios que resuelvas en la unidad es correcta: http://links.edebe.com/jhck

Y TAMBIÉN:

Las propiedades de las desigualdades del valor absoluto.

- $|x| \geq a$ si y solo si

  $x \leq -a$ o $x \geq a$
- $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$

TIC

Si accedes a la página http://www.ematematicas.net/irracionnal.php?a=, encontrarás una aplicación interactiva para practicar las ecuaciones irracionales.

Ejemplo 20

Resolvamos la desigualdad: $|2x+8|\geq 4$

$2x+8\leq -4$ ó $2x+8\geq 4$

$2x\leq -4-8$ | $2x\geq 4-8$

$x\leq \dfrac{-12}{2}$ | $x\geq \dfrac{-4}{2}$

$x\leq -6$ | $x\geq -2$

El conjunto solución total está dado por la unión de las dos soluciones parciales, pues todos los valores comprendidos en estos intervalos cumplen con la desigualdad propuesta.

Solución: $(-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$

Ejemplo 21

Resolvamos: $|x - 5| \leq 2x + 2$.

De acuerdo con la propiedad b, la desigualdad en valor absoluto es equivalente a la siguiente desigualdad: $-(2x + 2) \leq x - 5 \leq 2x + 2$ para resolverla, la trataremos como dos casos separados.

Caso 1: $-(2x + 2) \leq x - 5$. Despejando x tenemos.

$-2x - 2 \leq x - 5$

$-2x - x \leq -5 + 2$

$-3x \leq -3$

$x \geq \dfrac{-3}{-3}$ o bien, $x \geq 1$; el sentido de la desigualdad cambia al multiplicar o dividir por una cantidad negativa

Caso 2: $x - 5 \leq 2x + 2$. Despejamos x.

$x - 5 \leq 2x + 2$

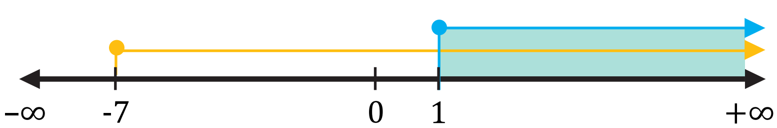
$x - 2x \leq 2 + 5$

$-x \leq 7$

$x \geq -7$

Ahora, la solución de la desigualdad $|x - 5| \leq 2x + 2$, es la intersección de las soluciones de los dos casos.

La intersección de $x \geq 1$ y $x \geq -7$ es el intervalo, $[1, +\infty)$.



4.4. Ecuaciones irracionales

Hay ecuaciones que tienen la incógnita dentro del signo radical, a estas ecuaciones las llamamos ecuaciones irracionales.

Por ejemplo, $\sqrt{x} + x = 2x - 12$ es una ecuación irracional.

A continuación, detallaremos los pasos que hay que seguir para resolverla.

Ejemplo 22

Resolvemos la ecuación irracional $\sqrt{x} + x = 2x - 12$.

- Traspongamos los términos: pasamos a uno de los miembros un radical y al otro miembro, los términos restantes.

$$\sqrt{x} = 2x - x - 12$$

- Reduzcamos los términos semejantes.

$$\sqrt{x} = x - 12$$

- Elevemos al cuadrado los dos miembros de la ecuación.

$$(\sqrt{x})^2 = (x-12)^2 \rightarrow x = x^2 - 24x + 144 \rightarrow x^2 - 24x - x + 144 = 0$$
$$\rightarrow x^2 - 25x + 144 = 0$$

- Resolvamos la ecuación obtenida.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144}}{2 \cdot 1} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$= \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} \dfrac{25 + 7}{2} = 16 \\ \dfrac{25 - 7}{2} = 9 \end{cases}$$

- Comprobemos la solución sustituyendo los valores obtenidos.

Si $x = 16 \rightarrow \sqrt{16} + 16 = 2 . 16 - 12 \rightarrow 4+16=32-12 \rightarrow 20 = 20$

Se cumple la igualdad.

$x = 9 \quad \sqrt{9} + 9 = 2 . 9 - 12 \rightarrow 3+9= 18 -12 \rightarrow 12= 6$

No se cumple la igualdad.

La solución de la ecuación es x = 16.

Y TAMBIÉN: ¿?

En la ecuación irracional, hemos visto que para x = 9 no se cumplía la igualdad. No obstante, sabemos que $\sqrt{9} = |3|$. Si tomamos el valor negativo de la raíz, la igualdad sí se cumple.

$-3 + 9 = 2 \cdot 9 - 12$

Así pues, al resolver ecuaciones irracionales, deberemos tener en cuenta las raíces negativas y analizar en cada caso si la solución tiene significado.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Observa que, al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación $\sqrt{x} = 2x - x - 12$, hemos obtenido la ecuación de segundo grado $x^2 - 25x + 144 = 0$, que no es equivalente a la dada, pero toda solución de la primera ecuación lo es también de la segunda.

Actividades

45. **Determina** cuál de estos números es solución de la siguiente ecuación irracional: $3 . (x - 1) = 2\sqrt{(x + 6)}$.

a. 5 b. 3 c. -3

46. **Resuelve** estas ecuaciones irracionales.

a. $\sqrt{4x} - 5x = -4x$ b. $2\sqrt{x} - 5 = 10 - x$ c. $\sqrt{x + 5} = x - 1$ d. $2x - 2 = \sqrt{8x} - x$

Ejercicios resueltos

A

1. Resuelve la ecuación siguiente: $\sqrt{(5+x)} + \sqrt{(2x-4)}=5$

Solución

Comprender

- Al leer el enunciado, advertimos que se trata de una ecuación irracional que tiene dos radicales.

Planificar

- Despejamos un radical y seguimos los pasos para resolver las ecuaciones irracionales.

Ejecutar el plan

- Despejamos el primer radical. $\sqrt{5+x} = 5 - \sqrt{2x-4}$
- Elevamos al cuadrado los dos miembros y reducimos los términos semejantes.

$$(\sqrt{5+x})^2 = (5 - \sqrt{2x-4})^2$$

$$5 + x = 25 - 10.\sqrt{2x-4} + 2x - 4 \rightarrow 10.\sqrt{2x-4} = 16 + x$$

- Observamos que la ecuación que obtenemos es irracional; por lo tanto, repetimos el proceso anterior.

$$\left(10\sqrt{2x-4}\right)^2 = (16+x)^2$$

$$\Rightarrow 100 \cdot (2x-4) = 256 + 32x + x^2$$

$$200x - 400 = 256 + 32x + x^2 \Rightarrow x^2 - 168x + 656 = 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 164 \\ 4 \end{cases}$$

Revisar

- Comprobamos si las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación irracional inicial.

$x = 164 \longrightarrow \sqrt{5+164} + \sqrt{2 \cdot 164 - 4} = 13 + 18 \neq 5$

$x = 4 \longrightarrow \sqrt{5+4} + \sqrt{2 \cdot 4 - 4} = 13 + 18 = 5$

Así pues, la solución de la ecuación es $x = 4$.

B

1. Resuelve la ecuación siguiente: $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$.

Solución

Comprender

- Al leer el enunciado, advertimos que se trata de una ecuación irracional que tiene dos radicales.

Planificar

- Seguimos los pasos para resolver las ecuaciones irracionales.

Ejecutar el plan

- Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación y reducimos términos semejantes.

$$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8-2x}$$

$$5x - 6 = 2\sqrt{8-2x}$$

$$25x^2 + 36 - 60x = 4(8-2x)$$

$$25x^2 - 52x + 4 = 0$$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} \begin{cases} x = 2 \\ x = 0{,}08 \longrightarrow \text{no satisface la igualdad} \end{cases}$$

Así, $x = 2$.

Revisar

- Comprobamos si las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación irracional inicial.

La solución de la ecuación es $x = 2$.

Si $x = 0.08$

$$\Rightarrow \sqrt{3(0.08)+3} - 1 = \sqrt{8 - 2(0.08)}$$

$$\sqrt{3.24} - 1 = \sqrt{8 - 0.16}$$

$$0.8 \neq 2.8$$

Por lo tanto $x = 0.08$ no es solución.

Si $x = 2$

$$\Rightarrow \sqrt{3(2)+3} - 1 = \sqrt{8 - 2(2)}$$

$$\sqrt{9} - 1 = \sqrt{4}$$

$$3 - 1 = 2$$

$$2 = 2$$

Por lo tanto $x = 2$ sí es solución.

Ejercicios y problemas propuestos

1 Radicales

1. **Calcula**.

   a. $3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

   b. $-3\sqrt{2} - 4 \cdot 3\sqrt{3} - 7\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

   c. $\frac{3}{2}\sqrt{15} + \frac{2}{3}\sqrt{15} - \frac{1}{6}\sqrt{15}$

   d. $\frac{7}{2}\sqrt{11} - \frac{4}{3}\sqrt{7} - \frac{5}{6}\sqrt{11} + \frac{-9}{4}\sqrt{7} + \sqrt{7}$

2. **Escribe** como una única potencia de exponente fraccionario las siguientes expresiones:

   a. $\frac{\sqrt[3]{x^7}}{x^2}$

   b. $\sqrt[5]{\frac{1}{y^2}}$

   c. $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{125}}$

   d. $\frac{\sqrt[3]{m^2}}{m^3} \cdot \frac{m^4}{\sqrt{m}}$

3. **Expresa** mediante un solo radical:

   a. $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$

   b. $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$

   c. $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

   d. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

   Comprueba, con la ayuda de la calculadora, que los valores de las expresiones finales son los mismos que los del enunciado.

4. **Efectúa** las operaciones siguientes:

   a. $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{3xy}$

   b. $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot$

   c. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

   d. $\frac{\sqrt[6]{6ab^4}}{\sqrt[3]{a^2b}}$

5. **Extrae** los factores que sean posibles fuera del radical:

   a. $\sqrt{512}$ c. $3\sqrt{6\,250}$ e. $\sqrt[3]{600}$

   b. $\sqrt[3]{216}$ d. $2\sqrt[4]{405}$

6. **Calcula**:

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$$

7. **Extrae** los factores que puedas de los radicales y **calcula** los resultados de las siguientes operaciones:

   a. $3\sqrt{2} - 5\sqrt{8} + 7\sqrt{50} - 4\sqrt{18}$

   b. $-3\sqrt{27} - 2\sqrt{125} + 8\sqrt{75} - 10\sqrt{20}$

   c. $7\sqrt{625} - \frac{2}{5}\sqrt{5} + \frac{3}{7} + 6\sqrt{125}$

8. **Calcula** y **simplifica**:

   a. $\sqrt{45} - 2\sqrt{20} + \frac{\sqrt{405}}{3} + \sqrt{80}$

   b. $\sqrt[3]{x\sqrt{\sqrt{x^5y^3}}}$

   c. $\frac{\sqrt[6]{a^5b^7c^4}}{\sqrt[3]{a^2b^5c^2}}$

2 Logaritmos

9. **Calcula** estos logaritmos.

   a. $\log_4 256$

   b. $\log 1000$

c. $\log_6 36$

d. $\log_2 \frac{1}{8}$

e. $\log 0{,}001$

f. $\log_5 0{,}04$

10. A partir de la definición de logaritmo, **calcula**:

a. $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_4 16 - \log_2 \sqrt{2}$

b. $\log_3 \frac{1}{243} - \log_6 1 + \log_2 32$

11. **Calcula**.

a. $\log_4 \pi$

b. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{\sqrt{3}}$

c. $\log_{\sqrt{2}} 2$

d. $\log_9 \frac{1}{81}$

e. $\log_4 1\,024$

f. $\log_2 \sqrt{2}$

12. **Utiliza** el cambio de base para calcular los siguientes logaritmos con la calculadora:

a. $\log_5 244$

b. $\log_5 6$

c. $\log_{0,8} 24$

d. $\log e$

e. $\log_\pi 3$

f. $\log_7 2\,000$

13. **Aplica** las propiedades de los logaritmos:

a. $\log_x \frac{ab}{c}$

b. $\log_x \frac{a}{b^2}$

c. $\log_x \left(\frac{a}{b}\right)^2$

d. $\log_x \frac{a^3 b}{\sqrt{c}}$

14. **Deduce** la parte entera de estos logaritmos:

a. $\log_3 200$

b. $\log_7 60$

c. $\log_8 525$

d. $\log_4 3$

e. $\log 0{,}02$

f. $\log_5 20$

15. **Calcula** en cada caso el término que falta:

a. $\log_{\sqrt{5}} 125 = x$

b. $\log_x 81 = -4$

c. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = x$

c. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{81}} = x$

d. $\log_2 x^3 = 6$

e. $\log_x 125 = -3$

16. **Halla** los valores numéricos de estas expresiones:

a. $\log_x x^{\frac{5}{2}}$

b. $\log_2 \sqrt[5]{64}$

c. $2^{\log_x x^2}$

d. $\log_{10}(\log_{10} 10)$

e. $\log_x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^2}}$

f. $\log_{0,5} 64^{\frac{1}{3}}$

17. Si $\log x = 7{,}2$, **calcula** los valores de estas expresiones:

a. $\log \frac{x}{100}$

b. $\log \sqrt[4]{\frac{1}{x}}$

c. $\log (0{,}01x^2)$

d. $(\log x)^{\frac{1}{3}}$

18. **Desarrolla** estas expresiones logarítmicas:

a. $\log_3 \left[x\,(x+1)\right]$

b. $\log_5 \sqrt[4]{20}$

c. $\log_4 \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}$

19. Si $\log 2 = 0{,}301\,0$, $\log 3 = 0{,}477\,1$ y $\log 5 = 0{,}698\,9$, **calcula**:

a. $\log 216$

b. $\log 75$

c. $\log 0{,}002^{\frac{1}{2}}$

d. $\log \frac{1}{\sqrt[3]{216}}$

20. **Expresa** en un único logaritmo:

a. 3 (2 log 2 A - 5 log 2 B)

Ejercicios y problemas propuestos

21. **Convierte** cada expresión en un único logaritmo:

a. $\log(ab) - 2\log\frac{a}{b}$

b. $2\ln(x - y) - \ln(x^2 - y^2)$

c. $2\log_4 t\ \frac{\log_4 y}{3} + (z - 2)\log_4 8$

22. **Escribe** mediante un solo logaritmo las siguientes expresiones:

a. $3\log 5 + 1/2\log 9 - 3\log 3 - \log 25$

b. $\log_3(x^2+2x+1) - \log_3(x+1)$

c. $\log(3-x) + \log(3+x)$

23. Si $\log x = k$, **escribe** en función de k:

a. $\log x^3$

b. $\log\frac{x}{1\,000}$

c. $\log x\sqrt{10}$

24. **Halla** el resultado de cada expresión mediante las propiedades de los logaritmos:

a. $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49$

b. $\log_5 625 - \log_9 1$

25. **Convierte** cada expresión en un único logaritmo:

a. $3\log_5 a + 4\log_5 b$

b. $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} a - 3\log_{\frac{1}{2}} a$

c. $2(\log_4 x + 2\log_4 y - 3\log_3 z)$

26. Si $\log x = 3$ y $\log y = 5$, **calcula**:

a. $\log(xy)$

b. $\log\frac{x^2}{y}$

c. $\log x^{\log y}$

d. $\log\sqrt[3]{xy^2}$

e. $\log\frac{y}{\sqrt[4]{x}}$

f. $\log y^{\log(xy)}$

27. **Halla** los valores de estos logaritmos utilizando sus propiedades y la calculadora:

a. $\log_5 36^2$

b. $\log_6 100$

c. $\log_2\sqrt{31}$

d. $\log_4 31^5$

28. **Calcula** el valor de la incógnita y en cada una de estas igualdades:

a. $\log_y 64 = 2$

b. $\log_y\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

c. $\log 4^y = 3$

d. $6^{-y} = 4$

e. $\log y^3 = -3$

f. $8^y = 120$

29. **Calcula**:

a. $\log_3 54$

b. $\log 0{,}214\,4$

c. $\log_7 0{,}69$

d. $\log_4\sqrt[6]{8^3}$

e. $\log_{\sqrt{5}} 100$

3 División de polinomios y ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

30. **Utiliza** el teorema del resto para calcular el valor numérico de $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ para $x = 3$ y para $x = -3$.

31. **Calcula** las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini:

a. $(x^2 + 2x - 3) : (x + 3)$

b. $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$

c. $(x^3 + 8x^2 - 23x - 30) : (x + 10)$

32. **Aplica** la regla de Ruffini especificando el cociente y el resto de cada división:

a. $(x^3+2x+70) : (x+4)$

b. $(x^5 - 2x^2 - 3) : (x - 1)$

c. $(x^6 + x) : (x + 3)$

d. $(x + 2x^2 - 4x - 8) : (x - 3)$

e. $(4x^3 - 5x) : (x - 2)$

f. $(x^7 - x) : (x + 2)$

33. **Utiliza** los teoremas del resto y del factor para determinar si los siguientes polinomios están factorizados correctamente:

a. $x^3 - 3x^2 + 2x + 3 = (x + 5)(x + 1)(x - 2)$

b. $x^3 - 2x^2 + 1 = (x - 1)^2 (x + 1)^2$

c. $x^3 - 4x^2 - 7x - 10 = (x - 1)(x - 2)(x - 5)$

d. $2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2$

34. **Indica**, sin efectuar ningún cálculo, las posibles raíces del polinomio $x^3 - 3x^2 + 4$.

35. **Halla** dos raíces del polinomio $x^3 - 7x + 6$.

36. ¿Cuáles de los siguientes polinomios son múltiplos de $2x - 4$?

a. $2x^3 - 6x^2 + 8$

b. $x^3 - 2x^2$

c. $2x^2 + 6x - 4$

d. $x^2 + 3x - 2$

37. ¿Cuáles de los siguientes polinomios son divisores de $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18$?

a. $x - 3$

b. $x + 1$

c. $3x^2 + 3x + 6$

d. $x^2 - 4x - 1$

38. **Resuelve** las siguientes ecuaciones.

a. $\left|\frac{3x}{4} - 1\right| = 4$

b. $|3x - 1| + 4 = 0$

c. $\left|\frac{x + 1}{x - 5}\right| = 1$

d. $\left|\frac{4 - x}{3x}\right| = 3$

39. **Resuelve** las siguientes inecuaciones y represente gráficamente la respuesta.

a. $|2x - 1| > 3$

b. $|x - 3| > -1$

c. $3 \geq |4x + 2|$

d. $\left|3 - \frac{x}{2}\right| \leq 2$

40. **Resuelve**:

a. $5x - 3(1 - 4x) \leq 4x - 1$

b. $\frac{5x - 2}{3} - \frac{x - 3}{2} \geq \frac{x - 2}{3} + \frac{29}{6}$

c. $7(2x - 1) - 3x \leq 2(x + 1) - 9$

d. $3(x - 7) + 2x \leq 5(x - 1)$

e. $4(3x - 1) - 5x < 7(x - 1) + 3$

41. **Resuelve** las siguientes inecuaciones:

a. $3 - 5x < 8$

b. $2(x - 2) + 3x < 5x + 6$

c. $\frac{2x - 3}{8} - \frac{5x - 3}{2} < + \frac{3x}{4}$

d. $\frac{x - 1}{10} > \frac{2 - 3x}{5} + \frac{4x - 2}{3}$

e. $5(x - 2) - \frac{1}{3} < 3(x - 1) + 2x$

f. $3x + 7 - 5(2x - 3) \geq \frac{x - 1}{2} - 1$

g. $\frac{3(x - 1)}{2} - x > \frac{x - 3}{2}$

h. $\frac{4x - 1}{2} \leq 2x + \frac{9}{2}$

42. ¿Cuántos metros de tela metálica se necesitan para vallar una parcela cuadrada cuya área sea, al menos, de 36 m^2?

43. Averigua para qué valores del radio el área de un círculo es superior a 17 cm^2.

44. Las soluciones de $\sqrt{(3x+1)} - \sqrt{(2x-1)} = 1$ son:

a. 1 y 5

b. 5 y 2

c. 21 y 5

Números reales

El conjunto de los número reales es el que resulta de añadir los números irracionales (que no pueden ser expresados como fracciones) a los racionales.

en función de su expresión decimal los clasificamosen

- Números decimales exactos.
- Números decimales periódicos puros.
- Números decimales periódicos mixtos.
- Números irracionales.

los expresamos gráficamente sobre la

Recta real

lo que permite compararlos y establecer un

Orden

a < b si a está a la izquierda de b en la recta real.

y definir

Intervalos y entornos

la amplitud de un intervalo caracteriza

Valor absoluto de a: | a |

Distancia entre a y b: d(a, b) = | b - a |

pueden aproximarse de distintas formas

- aproximaciones decimales
- por truncamiento
- por redondeo

que utilizamos para

Operar con números reales

al aproximar cometemos

Errores

- $\varepsilon_a = \left|\text{Valor exacto} - \text{Valor aproximado o medido}\right|$
- $\varepsilon_r(\%) = \dfrac{\varepsilon_a}{\text{Valor exacto}} \cdot 100$
- Cotas de error

el tipo y el orden de la aproximación determinan

el error cometido

las cifras significativas

Radicales

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Propiedades

- $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
- $\sqrt[n \cdot m]{a^m} = \sqrt[n]{a}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $\sqrt[n]{(a \cdot b)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

A las propiedades las utilizamos para calcular radicales equivalentes, lo que nos será útil para operar.

Operaciones

- $a\sqrt[m]{x} \pm b\sqrt[m]{x} = (a \pm b)\sqrt[m]{x}$
- $a\sqrt[m]{x} \cdot b\sqrt[m]{y} = a\,b\sqrt[m]{x\,y}\,, \quad \dfrac{a\sqrt[m]{x}}{b\sqrt[m]{y}} = \dfrac{a}{b}\sqrt[m]{\dfrac{x}{y}}$
- Racionalización

Logaritmos

$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y,$

para $a \in \mathbb{R} > 0,\ a \neq 1,\ y > 0$

Base logarítmica

- $\log_{10} y = \log y$
- $\log_e y = \ln y$
- Cambio de base $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Propiedades

- si $x \neq y \Longrightarrow \log_a x \neq \log_a y$
- si $a > 1$ y $x < y \Longrightarrow \log_a x < \log_a y$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{\log_a x}{n}$

Para finalizar

1. **Simplifica** al máximo estas operaciones con radicales.

   a. $\dfrac{25\sqrt{500a^2b}}{9\sqrt{160a^6b}}$ b. $\dfrac{-16\sqrt{1000a^3b^5}}{5\sqrt{400a^2b^3}}$

2. **Calcula**, utilizando la regla de Ruffini, el cociente y el resto de estas divisiones polinómicas.

   a. $(2x^2 - 3x + 4) : (x - 2)$

   b. $(2x^4 - 3x + 4) : (x + 2)$

   c. $(7x^4 - 5x^3 - 12x^2 + x) : (x + 1)$

3. **Representa** gráficamente las soluciones de estas inecuaciones.

   a. $|2x - 3| \geq 3$ c. $|3 \cdot (x - 2)| < 5$

   b. $2x - 5x \leq 1$ d. $3 \cdot (x - 1) - |2x| > 1$

4. **Determina** la solución de cada una de las siguientes inecuaciones:

   a. $2x - 3x > -5x + 7$ b. $4x + 3 < 0$

5. **Gráfica** los intervalos solución de las siguientes inecuaciones:

   a. $3x - 2 \geq 7x$ b. $5x - 9 > 1 - 3x$

6. ¿Cuál es la base a en la expresión $\log_a 3 = \frac{1}{2}$?

7. **Representa** las soluciones de las siguientes inecuaciones:

   a. $\dfrac{2x - 6}{4} < \dfrac{3 - 2x + 3x}{5}$

   b. $\dfrac{x - 6}{3} < 2x - 5$

   c. $\dfrac{x - 3}{2} - \dfrac{5x - 1}{3} < 0$

   d. $\dfrac{2}{3}x - 5(x - 2) < 3(3x - 1)$

8. Si $\log_3 p = 5$ y $\log_3 q = -2$, **calcula**:

   a. $\log_3 (p \cdot q)$

   b. $\log_3 p^2$

   c. $\log_3 \left(\dfrac{p^5}{q}\right)$

9. **Expresa** mediante un solo logaritmo:

   a. $\log p + \log q - \log r$

   b. $\log p - 2 \log q$

10. Sabemos que $\log 2 = 0{,}3010$ y $\log 5 = 0{,}6990$. **Utiliza** estos valores y las propiedades de los logaritmos para calcular:

    a. $\log 200$

    b. $\log 2{,}5$

    c. $\log \sqrt{0{,}125}$

EVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad temática?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?

- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

BLOG

Euler y los matemáticos de su tiempo

«Lean a Euler, lean a Euler; él es el maestro de todos nosotros». (Pierre S. Laplace)

Esta frase la pronunció Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), un colega de una generación posterior a Leonhard Euler, que admiraba su prolífica obra (entre 60 y 80 volúmenes).

- **Busca** en la Red dos definiciones algebraicas del número e enunciadas por Euler y anótalas en tu cuaderno.
- **Busca** también el valor del número e, tal como lo describió Euler (con veintitres cifras decimales). ¿Cuántas cifras decimales se han podido obtener con la tecnología actual?

SOCIEDAD

Dublín y los logaritmos

James Joyce (1882 - 1941) es quizás el escritor francés más famoso, conocido sobre todo por su obra maestra Ulises (1922). En ella se describe de manera exhaustiva y detallada la ciudad de Dublín, sobre la que se plantea el siguiente enigma: ¿se puede cruzar la capital irlandesa sin pasar por delante de ningún pub? Matemáticamente es muy dificil responder dicha pregunta, pero recientemente el informático Rory McCann aseguró tener una respuesta basada en los logaritmos.

- **Entra** en la Red y accede a: http://links.edebe.com/cp, en la que encontrarás más información. ¿En qué elementos se basa dicho cálculo?
- **Busca** también información sobre otros ámbitos (técnicos, sociales, culturales, artísticos...) en los que investigan los logaritmos y prepara una breve presentación de diapositivas (5 minutos) para exponer en clase tus resultados.

SI YO FUERA

Ingeniero químico

Me pudiera desempeñar en diferentes campos, y por tanto, podría trabajar en diversas industrias como son la petroquímica, la industria de los plásticos y los productos transformados, la industria de las fibras y los tejidos, la farmacéutica, la veterinaria, la industria del papel, la adobería, la industria de las pinturas y barnices, metalúrgica, etc. También en diferentes empresas de ingeniería, servicios y consultoría; en centros de investigación, desarrollo tecnológico e innovación, en el tratamiento y elaboración de métodos de recuperación y comercialización de residuos o bien a la consultoría medioambiental, de seguridad o higiene.

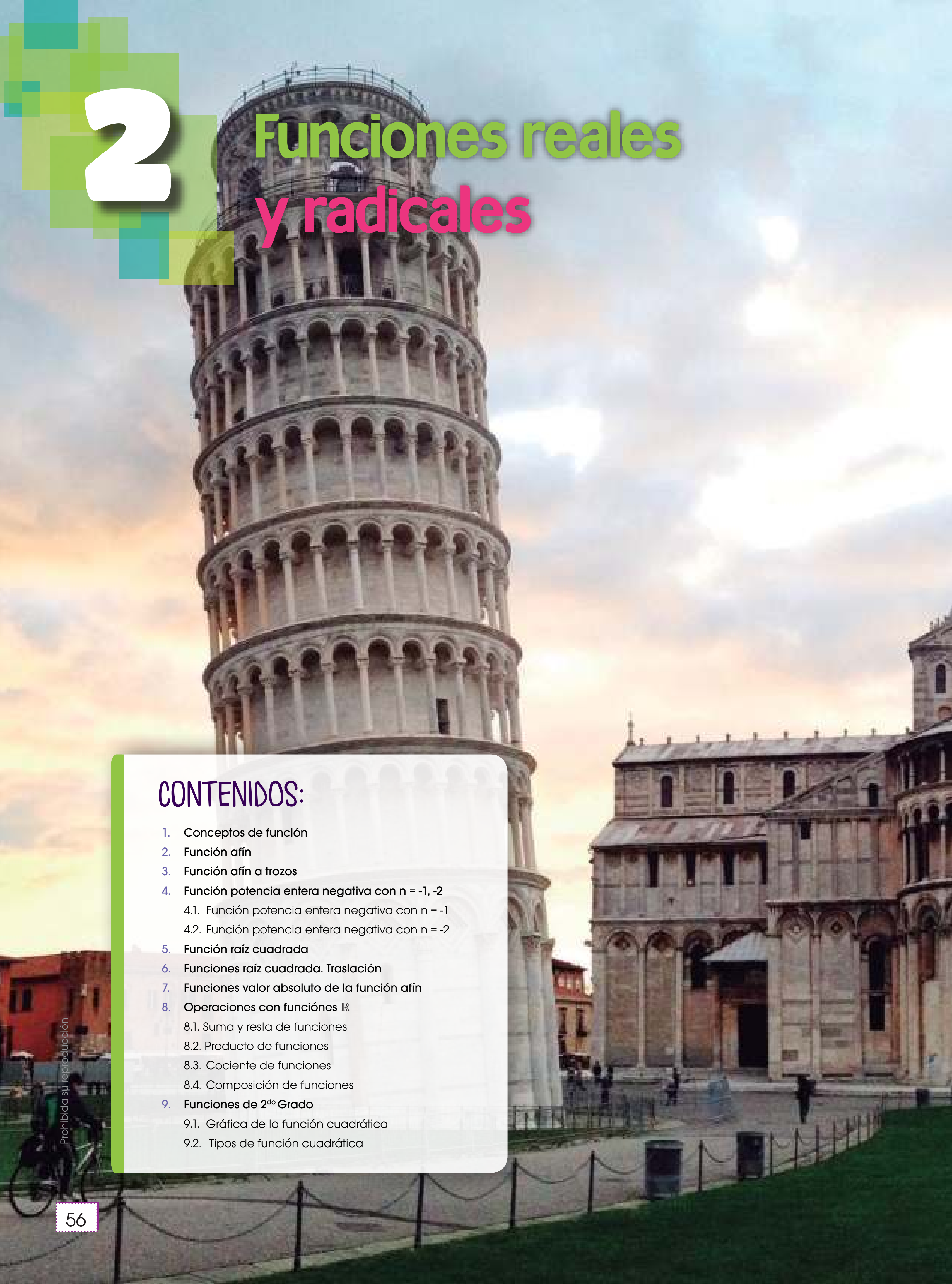
Y como la formación específica se centra en la ingeniería química, donde se abordan los estudios de procesos industriales en los que las sustancias experimentan una modificación en su composición, estado físico o contenido energético, necesito conocer y aplicar correctamente los logaritmos para calcular el pH de las sustancias, es decir, medir la acidez o la alcalinidad de una sustancia.

SENTIDO CRÍTICO

El cálculo del IPC

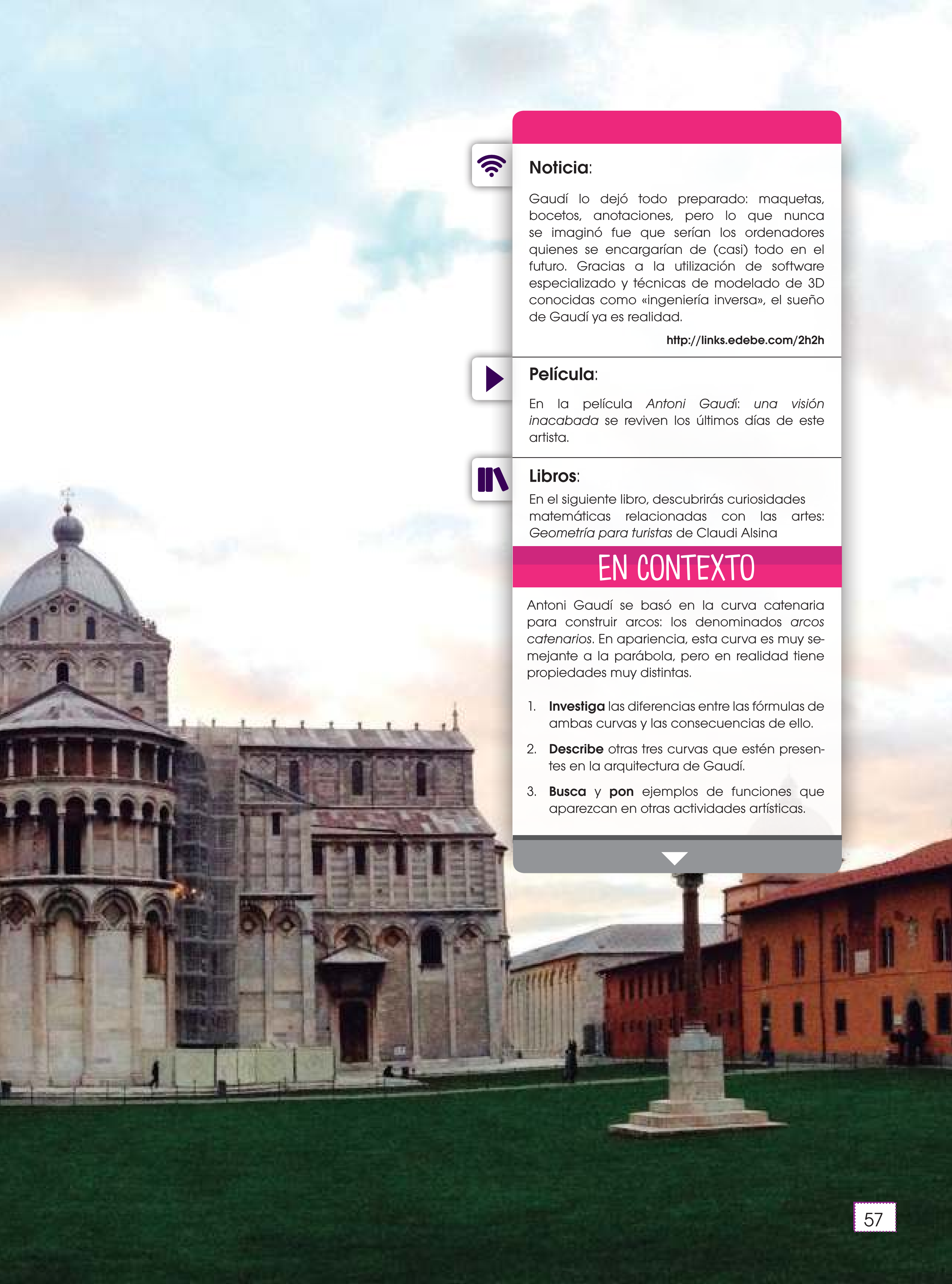
El IPC (índice de precios al consumo) indica la variación de los precios de diversos artículos y servicios entre dos períodos de tiempo. En España se calcula mediante la fórmula de Laspeyres, de la que forma parte un determinado polinomio con coeficientes porcentuales.

1. **Formen** grupos de tres componentes y **distribuyan** los roles y las tareas con el fin de investigar qué es el IPC.
2. **Busquen** información en distintas fuentes para averiguar qué tipo de artículos y servicios se utilizan para calcular el IPC en España y de dónde se obtienen estos datos.
3. ¿Crees que es ajustada la distribución porcentual de dichos artículos y servicios teniendo en cuenta el uso real que se hace de cada uno de ellos?
4. **Efectúen** un cálculo simplificado del IPC en su barrio o población. Para ello, **definan** una cesta de la compra básica y en el supermercado más próximo **determinen** la evolución semanal del precio de vuestra cesta a lo largo de un par de meses. **Comparen** el resultado obtenido con la variación real del IPC en el mismo período.
5. **Expongan** en clase el método que **han** seguido y su conclusiones.



2 Funciones reales y radicales

CONTENIDOS:



Noticia:

Gaudí lo dejó todo preparado: maquetas, bocetos, anotaciones, pero lo que nunca se imaginó fue que serían los ordenadores quienes se encargarían de (casi) todo en el futuro. Gracias a la utilización de software especializado y técnicas de modelado de 3D conocidas como «ingeniería inversa», el sueño de Gaudí ya es realidad.

http://links.edebe.com/2h2h

Película:

En la película *Antoni Gaudí: una visión inacabada* se reviven los últimos días de este artista.

Libros:

En el siguiente libro, descubrirás curiosidades matemáticas relacionadas con las artes: *Geometría para turistas* de Claudi Alsina

EN CONTEXTO

Antoni Gaudí se basó en la curva catenaria para construir arcos: los denominados *arcos catenarios*. En apariencia, esta curva es muy semejante a la parábola, pero en realidad tiene propiedades muy distintas.

1. **Investiga** las diferencias entre las fórmulas de ambas curvas y las consecuencias de ello.
2. **Describe** otras tres curvas que estén presentes en la arquitectura de Gaudí.
3. **Busca** y **pon** ejemplos de funciones que aparezcan en otras actividades artísticas.

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Las relaciones funcionales están presentes en todas las ramas de las ciencias. La razón es porque describen multitud de fenómenos de nuestro entorno, en los que se relacionan magnitudes: tiempo y espacio, longitud y superficie.

Llamamos función a una relación de dependencia entre dos conjuntos, A y B: en la que a cada elemento x del conjunto A le corresponde, a lo sumo, un único elemento y del conjunto B.

Para referirnos a una función f, que relaciona dos conjuntos A y B, utilizaremos la notación habitual en la literatura matemática:

$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Y TAMBIÉN: ¿?

El origen de la palabra *función* se debe al matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Para Leibniz, una curva estaba formada por un número ilimitado de tramos rectos infinitamente pequeños.

https://goo.gl/nqZVH2

Generalmente, las funciones son relaciones de un conjunto de números reales con otro conjunto de números reales.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

¿Se te ocurren funciones entre otro tipo de conjuntos?

Extraído del libro Matemáticas I Bachillerato Editorial Edebe España

Si un elemento x del conjunto A se corresponde con un elemento y del conjunto B, decimos que y es la imagen de x por la función f, o que x es una preimagen de y.

El objetivo de esta unidad es estudiar los casos en los que tanto A como B son conjuntos de números reales. En este caso, decimos que f es una función real de variable real.

Ejemplo 1

Considere la siguiente relación de números reales: $y = \sqrt{x}$; justifica si la relación $y = f(x)$, que se deriva de esta relación es función o no.

Comprensión: Debemos comprobar si se puede establecer una relación funcional entre el cuadrado de un número a y el mismo número a.

Resolución: La respuesta es que $y = f(x)$ no es una función, ya que cualquier número real positivo es el cuadrado de dos números de diferente signo, pero con el mismo valor absoluto.

Así, por ejemplo, $x = 16$ es cuadrado de $y = -4$ y de $y = 4$. Por lo tanto, 16 debería tener dos imágenes contradiciendo la definición de función.

Representación de una función

Una relación funcional o función se puede expresar de varias formas: mediante una expresión verbal, una expresión algebraica, una tabla de valores o una gráfica.

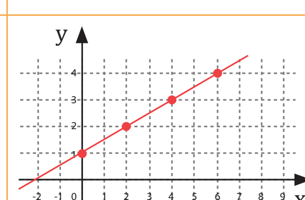
<table>
<tr><th></th><th>Expresión verbal</th><th>Expresión algebraica</th><th>Tabla de valores</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td>Descripción</td><td>Un texto puede indicarnos cómo se relacionan entre sí dos variables.</td><td>Describimos la relación entre las dos variables mediante una expresión algebraica.</td><td>Identificamos cada variable independiente con su variable dependiente, mediante una tabla.</td><td>Representamos en unos ejes de coordenadas todos los pares (x, 1(x)).</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td>A cada número real le corresponde su mitad más uno.</td><td>$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = f(x) = 0,5x + 1$
Aunque, si no existe confusión, se habla simplemente de:
$f(x) = 0,5x + 1$</td><td>Es una tabla donde se toma una pequeña parte de los valores de la variable independiente
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 1

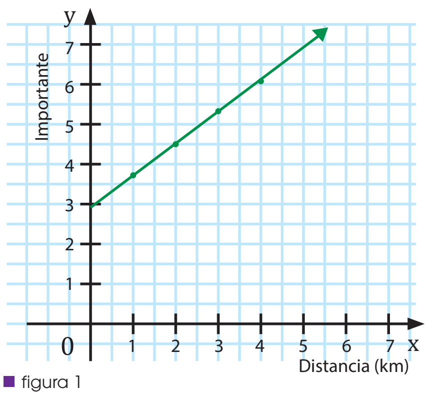


figura 1

2. FUNCIÓN AFÍN

Una empresa de mensajeros cobra por un encargo $3 fijos por la reserva, más $ 0,8 por kilómetro de trayecto.

Expresamos esta dependencia en la siguiente tabla de valores.

Distancia en kilómetros (x)	1	2	3	4
Importe en dólares (y)	3,80	4,60	5,40	6,20

Tabla 2

La gráfica de esta función es una semirrecta, cuyo punto inicial es el punto de coordenadas (0, 3). El valor de la ordenada de este punto, 3, es la *ordenada en el origen*.

Observa que cuando la variable x incrementa su valor en 1, 2 y 3 unidades, se produce un incremento de la variable y de 0, 8, 1, 6 y 2, 4 unidades, respectivamente.

El cociente entre el incremento de la variable y con relación al incremento de la variable x es un valor constante igual a 0,8.

$$\frac{0{,}8}{1} = \frac{1{,}6}{2} = \frac{2{,}4}{3} = 0{,}8$$

Este valor constante que se representa por m es la *pendiente* y mide la inclinación de la semirrecta respecto al semieje positivo de abscisas.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}8$$

La expresión algebraica de esta función es $y = 0{,}8\,x + 3$.

Decimos que f es una función afín definida $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Y TAMBIÉN: ¿?

El primero en construir una función fue Galileo (1564-1642). Desde lo alto de la torre inclinada de Pisa tiró dos bolas, una de hierro y otra de madera y comprobó que a pesar de la diferencia de peso, ambas llegaban al suelo a la vez; había descubierto la Ley de Caída de los Cuerpos. Continuando su estudio y empleando un curioso artilugio, comprobó que el espacio recorrido depende del cuadrado del tiempo, escribiendo la primera función de la historia.

Tomado de http://goo.gl/OgRFht

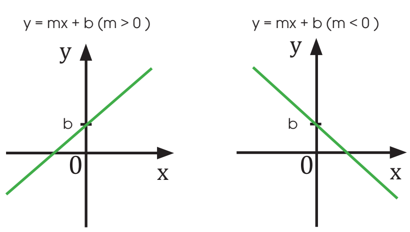


figura 2

Una función afín es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx + b$ $(m \neq 0)$, siendo *b* la ordenada en el origen. Su gráfica es una recta que pasa por el punto $(0, b)$ y tiene *pendiente* m.

Actividades

1. El perímetro de un triángulo equilátero, y, en función de la longitud de su lado, x, viene determinado por la expresión algebraica y = 3 x.
   a. **Construye** una tabla de valores y **representa** gráficamente dicha función.
   b. **Indica** qué tipo de función has representado.
   c. **Determina** la pendiente.
   d. **Calcula** el perímetro del triángulo equilátero, cuyo lado mide 8 cm.

2. El alquiler de un carro viene dado por un precio fijo de $ 25 y se cobra $ 5 por cada 10 km de recorrido.
   a. **Construye** una tabla de valores y representa la gráfica.
   b. **Indica** qué tipo de función has representado.
   c. **Determina** la pendiente y la ordenada en el origen.
   d. Si se recorren 60 km, ¿cuánto costará el alquiler del carro?

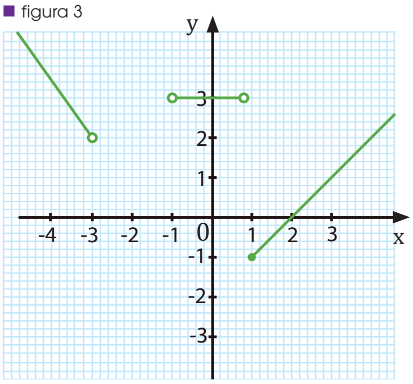
3. FUNCIÓN AFÍN A TROZOS

Una función definida a trozos es aquella cuya expresión analítica no es única, sino que depende del valor de la variable independiente.

Así, la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -3 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \in (-\infty, -3) \\ 3 & \text{si } x \in (-1, 1) \\ x - 2 & \text{si } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

figura 3



Es una función definida en tres trozos (fig. de la izquierda).

Para calcular la imagen de un elemento x observamos a qué intervalo pertenece y lo sustituimos en la expresión analítica correspondiente a dicho intervalo. Por ejemplo:

- Si $x = -4$, sustituimos en $f(x) = -x - 1$. Así: $f(-4) = -(-4) - 1 = 3$
- Si $x = -2$, la imagen no está definida, ya que -2 no pertenece a ningún intervalo de definición de la función.
- Si $x = 0{,}5$, sustituimos en $f(x) = 3$. Así: $f(0,5) = 3$
- Si $x = 1$, sustituimos en $f(x) = x - 2$. Así: $f(1) = 1 - 2 = -1$

Puesto que las expresiones que definen cada uno de los trozos tienen sentido para cualquier número real, el dominio está formado por la unión de los intervalos dados en la definición de la función.

$D(f) = (-\infty, -3]\ U(-1, 1)\ U\ [1, +\infty) = (-\infty, -3]\ U\ (-1, +\infty)$

Por otro lado, si observamos la figura de la izquierda vemos que su recorrido es: $R(f) = [-1, +\infty)$

TIC

Podrás encontrar funciones definidas en dos y en tres trozos, respectivamente. En la siguiente página: http://goo.gl/g1bu70

Función valor absoluto: $f(x) = |x|$

La función valor absoluto es una función definida a trozos.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Su dominio es $D(f) = \mathbb{R}$ y su recorrido, $R(f) = [0, +\infty)$

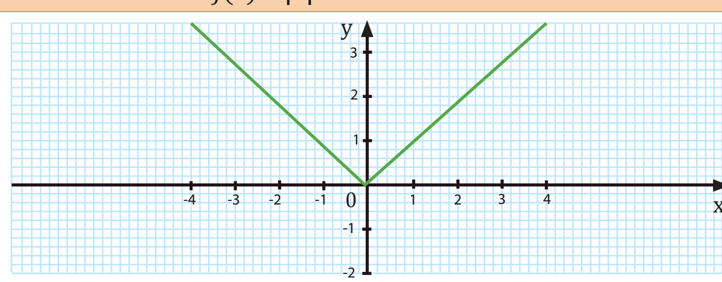


Tabla 3

Actividades

3. **Representa** gráficamente la siguiente función definida a trozos y **determina** su dominio y recorrido:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Problemas resueltos

A

1. **El fin de semana pasado, Juan hizo una salida en bicicleta para preparar la carrera del próximo domingo. Al llegar a casa, estudió los datos que había registrado mediante una aplicación que simulaba un velocímetro. Durante la primera hora, su velocidad media fue de 30 km/h. A continuación, estuvo 30 minutos descansando y después reanudó la marcha, consiguiendo en las 2 horas siguientes ir a una velocidad media de 40 km/h. Estuvo entonces 30 minutos parado y, finalmente, recorrió el último tramo en 30 minutos y a una media de 20 km/h.**

   a. Representa gráficamente la posición, en función del tiempo, y determina qué distancia recorrió.

   b. Indica el dominio y el recorrido de la función.

   c. Halla la expresión analítica que determina la función.

Solución

Comprensión: Para hallar la distancia que recorrió, deberemos tener en cuenta que los datos que aporta el problema son la velocidad y el tiempo, y tendremos que relacionarlos con la posición. Del mismo modo, para dibujar y estudiar la gráfica, es importante organizar los datos por tramos.

Datos: $t\,1 = 1$ h, $v1 = 30$ km/h, $t\,2 = 0{,}5$ h, $t\,3 = 2$ h, $v\,3 = 40$ km/h, $t\,4 = 30$ min, $t\,5 = 30$ min, $v\,5 = 20$ km/h

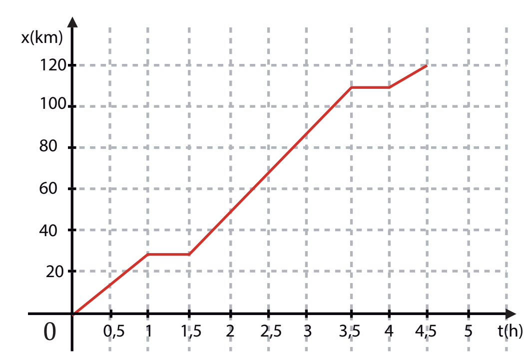
Resolución: **Intenta** resolver el problema individualmente. Para ello, **tapa** la columna de la respuesta y **sigue** estos pasos:

Pasos:

1. Organizamos los datos por tramos, determinando en cada uno la velocidad, el tiempo y la distancia que se recorre.
2. Dibujamos la gráfica de la función que representa la posición según el tiempo, a partir de los datos, y hallamos la distancia total recorrida.
3. Determinamos el dominio y el recorrido de la función.
4. Determinamos el tipo de función y escribimos la función analítica que la representa.

Respuesta

1. Tramo 1: $t\,1 = 1$ h, $v1 = 30$ km/h S distancia $= 30$ km
   Tramo 2: $t\,2 = 0{,}5$ h, $v2 = 0$ km/h S distancia $= 0$ km
   Tramo 3: $t\,3 = 2$ h, $v3 = 40$ km/h S distancia $= 80$ km
   Tramo 4: $t\,4 = 0{,}5$ h, $v4 = 0$ km/h S distancia $= 0$ km
   Tramo 5: $t\,5 = 0{,}5$ h, $v5 = 20$ km/h S distancia $= 10$ km
2. Dibujamos la gráfica a partir de los datos de la distancia recorrida en cada tramo y el tiempo:



3. En la gráfica vemos que se trata de una función definida a trozos, donde cada tramo es constante o una función de primer grado:

$$f(t) = \begin{cases} 30t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 30 & \text{si } \leq t < 1{,}5 \\ 30 + 40(t - 1{,}5) & \text{si } 1{,}5 \leq t < 3{,}5 \\ 110 & \text{si } 3{,}5 \leq t < 4 \\ 110 + 20(t - 4) & \text{si } 4 \leq t \leq 4{,}5 \end{cases}$$

Comprobación: Sustituimos los puntos en la función y vemos que coinciden con la gráfica. Además, observamos que las distancias que hemos obtenido son coherentes con el enunciado.

4. FUNCIÓN POTENCIA ENTERA NEGATIVA CON n = -1, -2

Una función potencia es una función de la forma $f(x)=x^n$, ($n \in \mathbb{Z}^-$, fijo) en donde el exponente n es un número real fijo.

Si el exponente es negativo, estamos en presencia de funciones potenciales de exponente entero negativo y las escribimos de la forma: $f(x)=1/x^n$ o $f(x)=x^{-n}$.

Dependiendo de los valores de n (par o impar), las características de las funciones varían tanto en su dominio como en su recorrido.

Estudiaremos las dos funciones de potencia entera negativa más relevantes:

1. cuando $n = -1$ 2. cuando $n = -2$

4.1. Función potencia entera negativa con $n = -1$

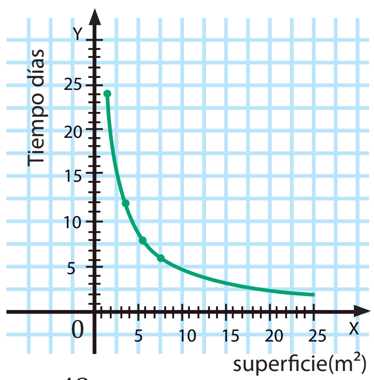
Se trata de una función de proporcionalidad inversa. Esta función expresa la relación entre dos variables inversamente proporcionales.

Ejemplo 2

El tiempo que tarda en llenarse una piscina está en función de la superficie que tenga la boca del grifo.

Si expresamos esta dependencia mediante una tabla de valores, observamos que al multiplicar por una constante la superficie de la boca, el tiempo de llenado queda dividido por la misma constante. Se trata, pues, de dos magnitudes inversamente proporcionales

Superficie en cm^2 (x)	2	4	6	8
Tiempo en días (y)	24	12	8	6



Se observa que el producto de un par de valores correspondientes es siempre el mismo. Dicho producto corresponde a la constante de proporcionalidad inversa. $2 \cdot 24 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 = 48$.

En general, $x \cdot y = 48$; es decir, la expresión algebraica de esta función es: $y = \dfrac{48}{x}$

En nuestro ejemplo, las dos variables solo pueden tener valores positivos y la gráfica de esta función es una curva situada en el primer cuadrante de los ejes de coordenadas, que denominamos *rama de una hipérbola*.

En general, una función de proporcionalidad inversa está definida para cualquier valor de la variable x distinto de 0, ya que no es posible la división para 0.

Una función de proporcionalidad inversa es una función cuya expresión algebraica es de la forma $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, siendo k la constante de proporcionalidad inversa. La gráfica de la función es una curva, con dos ramas denominada *hipérbola*

Actividades

4. **Determina** la constante de proporcionalidad inversa y **escribe** la expresión algebraica de cada una de las funciones definidas por estas tablas de valores:

a.

x	1	2	3	4	5	6
y	60	30	20	15	12	10

b.

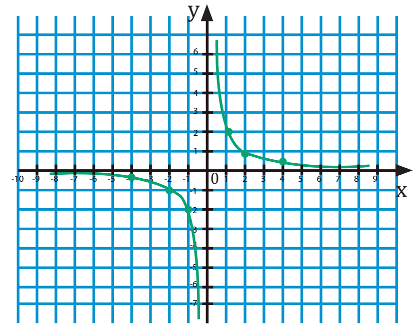
x	2	3	5	-6	-10	-15
y	-15	-10	-6	5	3	2

Representación gráfica

Ejemplo 3

Veamos ahora la función definida por la siguiente expresión algebraica: $y = \frac{2}{x}$

A partir de la expresión algebraica, deducimos que las variables son inversamente proporcionales, con una constante de proporcionalidad inversa $k = x \cdot y = 2$.



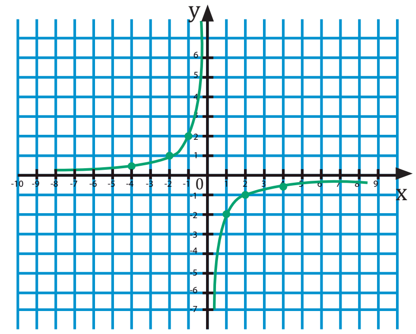
La tabla de valores correspondiente es:

x	1	2	3	-1	-2	-4
y	2	1	$\frac{2}{3}$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

Las ramas de la hipérbola están en el primer y el tercer cuadrante, puesto que la constante de proporcionalidad inversa es positiva. Esto indica que las variables x e y tienen el mismo signo.

Consideremos ahora la función cuya expresión algebraica es: $y = -\frac{2}{x}$

A partir de la expresión algebraica, se deduce que las variables también son inversamente proporcionales, con una constante de proporcionalidad inversa $k = x \cdot y = -2$.



Confeccionamos la correspondiente tabla de valores.

x	1	2	4	-1	-2	-4
y	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$

La gráfica de esta función es, pues, una hipérbola.

A diferencia de la anterior, esta curva tiene una de sus ramas en el segundo cuadrante y la otra en el cuarto, ya que la constante de proporcionalidad inversa es negativa. Esto indica que las variables x e y tienen distinto signo.

La gráfica de una función de proporcionalidad inversa es una **curva** con dos ramas denominada hipérbola.

Si la constante de proporcionalidad inversa es positiva ($k > 0$), es decir, si las dos variables tienen el mismo signo, las ramas de la hipérbola se encuentran situadas en el primer y el tercer cuadrante.

Si la constante de proporcionalidad inversa es negativa ($k < 0$), las dos variables tienen signo contrario y las ramas de la hipérbola están en el segundo y el cuarto cuadrante.

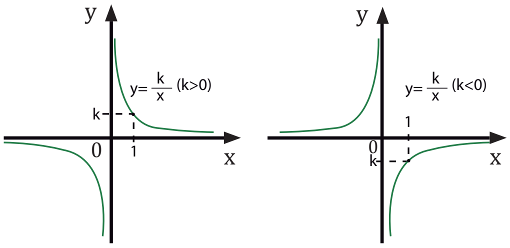


figura 4

Actividades

5. **Representa** gráficamente las funciones obtenidas en la página anterior.

4.2. Función potencia entera negativa con *n = - 2*

Una función potencia entera negativa tiene la forma $y = x^{-2}$ o $y = \frac{1}{x^2}$, y su representación gráfica es:

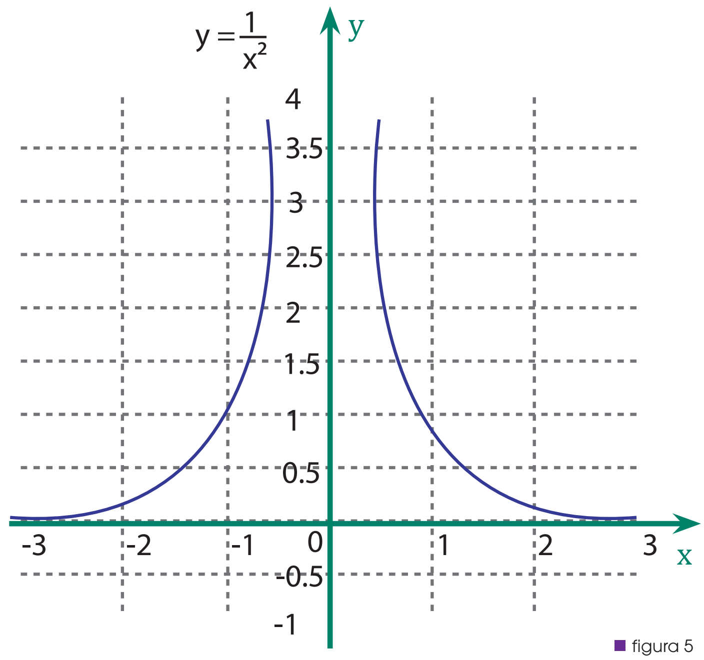


figura 5

A partir de esta gráfica podemos deducir las propiedades de la función: $y = \frac{1}{x^2}$

- Dominio: $x \epsilon R, x \neq 0$
- Recorrido: $y > 0$
- Simetrías: $f(-x) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.
- Asíntotas: y = 0 es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para toda x).

Sea f una función definida en un intervalo de $\mathbb{R}$, dicha función es convexa en el intervalo si todo segmento que une dos puntos de la gráfica queda por encima de la gráfica. En otras palabras una función es convexa sí y solo sí el conjunto de puntos situados en o sobre el gráfico es un conjunto convexo.

- La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, es convexa en los intervalos $(0,+\infty)$ y $(-\infty,0)$, pero no es convexa en $(-\infty,+\infty)$, debido al punto x = 0.
- Crecimiento y decrecimiento:

  crece de $(-\infty, 0)$; y decrece de $(0, +\infty)$.
- Es discontinua en x=0; ya que $f(0)$ no está definida.

Actividades

6. **Di** las propiedades y representa gráficamente la función:

a. $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$

b. $y = \frac{2}{x^2}$

c. $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

d. $y = \frac{3}{(x+1)^2} + 2$

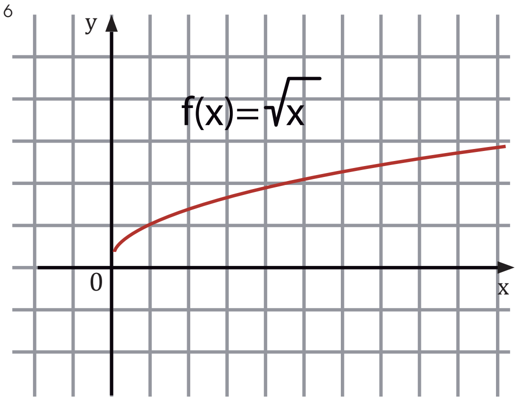
5. FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

Representación gráfica. Propiedades

La función raíz cuadrada o función radical está dada por la ecuación $f(x) = \sqrt{x}$, y solo tiene sentido para los valores de x que cumplan con la condición , ya que en el conjunto de los números reales las raíces de índice par con radicando negativo no están definidas.

El conjunto de pares ordenados de la función tienen la forma $(x; \sqrt{x})$. Y al representar los pares de puntos, obtenemos la gráfica de la funcion:

■ figura 6



A partir de esta representación gráfica analicemos sus propiedades.

- Dominio: El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que 0. Si el valor de x fuese negativo no sería una función raíz cuadrada.
- Dom: $x \in \mathbb{R}^+; x \geq 0 \;\; \text{o} \;\; (0,+\infty)$
- Recorrido o imagen: $\{y \in \mathbb{R};\, y \geq 0\}$
- Monotonía : Creciente en todo su dominio
- Valor mínimo: 0
- Punto de corte con el eje x: $x = 0$
- Paridad: No tiene

Si multiplicamos $\sqrt{x}$ por un valor positivo cambia el ancho de la media parábola.

Pero si multiplicamos $\sqrt{x} \cdot r$ por un número negativo te da la otra mitad de la media parábola horizontal.

Y TAMBIÉN: ¿?

¿Sabías que? La función raíz cuadrada se encuentra vinculada a la Teoría Lineal de las Olas; esta teoría indica que la raíz cuadrada del producto de la profundidad del agua, por aceleración de la gravedad, es la celeridad o velocidad de la onda que se acerca a la costa en aguas poco profundas.

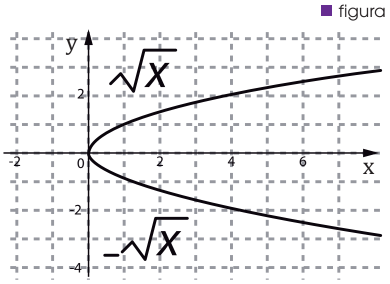
$$C = f(h) = \sqrt{gxh}$$

Esta misma fórmula se utiliza para determinar la velocidad de los tsunamis y permite conocer el tiempo que demorará en azotar a una costa en particular.

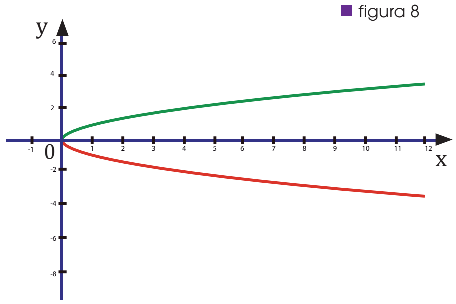
El estudio de las condiciones del oleaje reviste gran importancia por su aplicación en las plataformas marinas, petroleras, los rompeolas entre otros.

Para conocer más : http://goo.gl/1133t5

■ figura 7



■ figura 8



Actividades

7. **Representa** gráficamente la función, a partir de la tabla de valores:

a. $y = \sqrt{x+1}$ b. $y = -\sqrt{x+1}$

6. FUNCIONES RAÍZ CUADRADA. TRASLACIONES

Traslación de gráficas

Al gráfico de esta función se le pueden aplicar traslaciones horizontales, hacia la derecha o hacia la izquierda.

Cuando la función $f(x) = \sqrt{x}$, no se encuentre centrada en el origen, la función adopta la forma: $f(x) = \sqrt{(x + h)}$

Ejemplo 4

Representa $f(x) = \sqrt{(x - 1)}$

La representación de esta función significa que trasladamos una unidad hacia la derecha al gráfico de la función $f(x)= \sqrt{x}$, operando del más interno al más externo.

A la función $f(x) = \sqrt{x}$ también se le pueden desplazar aplicando otras traslaciones, es decir, en sentido vertical. Por tanto la expresión general que obtenemos es:

$f(x) = \sqrt{(x + h)} + k$

El valor de h indica un desplazamiento horizontal de la gráfica, pero en forma contraria al valor indicado por h.

Por ejemplo, en la función $f(x) = \sqrt{(x + 2)} - 3$, la gráfica se desplaza dos unidades a la izquierda.

El valor de k indica un desplazamiento vertical de la gráfica, en el mismo sentido que indica h. Por ejemplo, en la función $f(x) = \sqrt{(x + 2)} - 3$, la gráfica se desplaza tres unidades hacia abajo.

Analizando las propiedades de esta función:

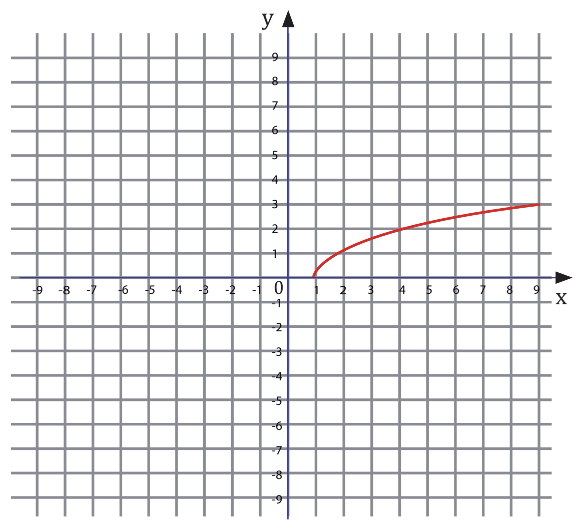
—Dominio: Dom: $x \epsilon R$; $x \geq -2$ o $(-2,+\infty)$

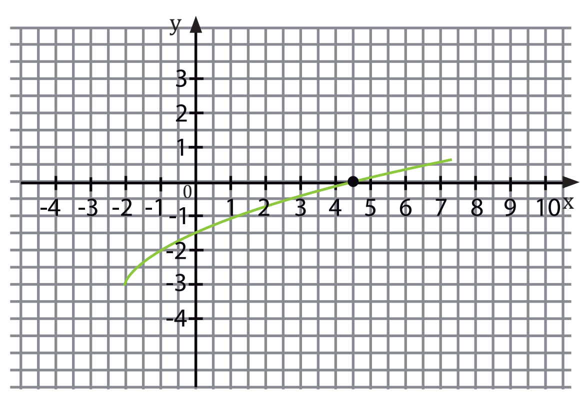
—Recorrido o imagen: $y \epsilon R$; $y \geq -3$

—Monotonía : Creciente en todo su dominio

—Punto de corte con el eje x: $x = 7$

—Paridad: No tiene





Actividades

8. **Analiza** y **representa** gráficamente las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{x - 5}$

b. $y = \sqrt{x + 3} + 2$

c. $f(x) = -\sqrt{x - 1} + 1$

d. $f(x) = \sqrt{x - 1} + 1$

e. $f(x) = -\sqrt{x - 5}$

f. $(x) = \sqrt{x - 2}$

7. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO DE LA FUNCIÓN AFÍN. PROPIEDADES

Las funciones en valor absoluto siempre representan una distancia o intervalos. Es decir es una función definida a trozos:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

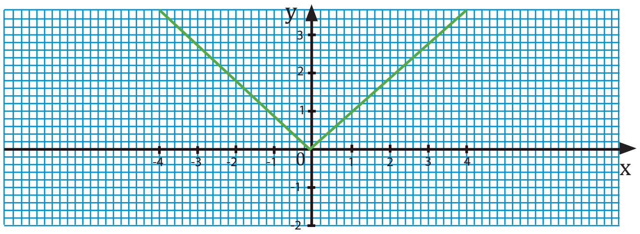


figura 9

A partir de su gráfico podemos analizar las propiedades fundamentales:

—Dominio es D (*f*) = R

—Recorrido, R (*f*) = [0, +∞).

—Monotonía: decrece de (-∞;0] y crece [0;+∞)

—Es simétrica respecto al eje y

Las funciones en valor absoluto se transforman en funciones a trozos, siguiendo los siguientes pasos:

—Se iguala a 0 la función, sin el valor absoluto, y se calculan sus raíces.

—Se forman intervalos con las raíces y se evalúa el signo de cada intervalo.

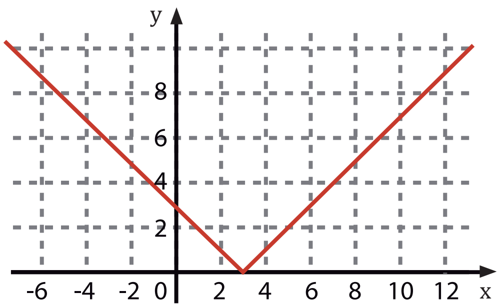
—Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función.

Ejemplo 5

Represente gráficamente la función $f(x) = |x - 3|$

Primero expresamos como una función a trozos

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



Siguiendo el procedimiento anterior

Igualamos a 0 la función, sin valor absoluto: $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

La x se intercepta en el punto (3, 0)

Propiedades: Dominio es D (*f*) = ℝ+

—Recorrido, R (*f*) =ℝ+ ; [0, +∞).

—Monotonía: Decrece de(-∞;3] y Crea [3;+∞)

Actividades

9. **Representa** gráficamente las siguientes funciones e **indica** las propiedades de cada una de ellas:

a. $y = |x + 3|$

b. $f(x) = |x - 4|$

c. $y = |-x - 3|$

d. $f(x) = |x - 2|$

e. $y = |-2x + 3|$

f. $g(x) = |\frac{x}{2} + 3|$

Y TAMBIÉN: ¿?

Las propiedades de la suma de funciones son:

- Asociativa:

  $(f+g)+h=f+(g+h)$
- Conmutativa:

  $f+g=g+f$
- Elemento neutro:

  $f+0=f$

  $0(x)=0$ para todo $x \in D(f)$:

  $f+0=f$
- Elemento opuesto:

  Dada una función $f(x)$, existe una función $-f(x)$ tal que:

  $f+(-f)=0$

Las propiedades del producto de funciones son:

- Asociativa:

  $(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)$
- Conmutativa:

  $f\cdot g=g\cdot f$
- Distributiva de la suma:

  $f\cdot(g+h)=f\cdot g+f\cdot h$
- Elemento neutro:

  $I(x)=1$ para todo $x \in D(f)$:

  $f\cdot 1=f$

8. OPERACIONES CON FUNCIONES REALES

Entre funciones reales de variable real, se pueden definir diversas operaciones.

8.1. Suma y resta de funciones

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son $D(f)$ y $D(g)$. La función suma, $f+g$, y la función diferencia, $f-g$, son funciones que asignan a cada número real x, la suma y la diferencia, respectivamente, de las imágenes por la función f y la función g:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \forall x \in D(f)\cap D(g)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\quad \forall x \in D(f)\cap D(g)$$

El dominio de las funciones suma y diferencia es la intersección de los dominios de f y g:

$$D(f+g)=D(f)\cap D(g)\qquad D(f-g)=D(f)\cap D(g)$$

8.2. Producto de funciones

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son $D(f)$ y $D(g)$. La función producto, $f\cdot g$, es la función que asigna, a cada número real x, el producto de las imágenes por la función f y por la función g:

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\quad \forall x \in D(f)\cap D(g)$$

El dominio de la función producto es la intersección de los dominios de f y g:

$$D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)$$

Ejemplo 6

Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x)}=\dfrac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x-2}}$ y $g(x)=x+2$, calcule la función suma, la función resta y la función producto, y determine el dominio de cada una de ellas.

Comprensión: Obtenemos las funciones suma, resta y multiplicación, operando las expresiones analíticas, y para el dominio determinamos la intersección de ambos dominios.

Resolución:

Suma: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{3}{x-2}+(x+2)=\dfrac{3+x^2-4}{x-2}=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

Resta: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{3}{x-2}-(x+2)=\dfrac{3-x^2+4}{x-2}=\dfrac{7-x^2}{x-2}$

Producto: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\dfrac{3}{x-2}\cdot(x+2)=\dfrac{3x+6}{x-2}$

Para hallar el dominio, determinamos primero el dominio de las funciones f y g: $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$; $D(g)=\mathbb{R}$

El dominio será la intersección de ambos: $D(f+g)=D(f-g)=D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}-\{2\}$

Comprobación: Puedes dar diferentes valores a x y comprobar que, por ejemplo, $f(x)+g(x)=(f+g)(x)$, $f(x)-g(x)=(f-g)(x)$ y $f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)$.

8.3. Cociente de funciones

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son $D(f)$ y $D(g)$. La función cociente de f y g, $\left(\frac{f}{g}\right)$, es la función que asigna, a cada número real x, el cociente de las imágenes por la función f y la función g, siempre que $g(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de la función cociente es la intersección de los dominios de f y g menos los puntos que anulan el denominador.

$$D(f/g) = D(f) \cap D(g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

Y TAMBIÉN:

En la composición de funciones, se nombra en primer lugar la función de la derecha, porque es la primera en actuar sobre x:

$$(g \circ f)(x)$$

Se lee: «f compuesta con g».

Ejemplo 7

Dadas las funciones $f(x) = \frac{3}{2-x}$ y $g(x) = x + 2$, calcula la función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)$ y determina su dominio.

Comprensión: Obtenemos la función cociente, operamos las expresiones analíticas y hallamos el dominio determinando la intersección de los dominios y los puntos que anulan a $g(x)$.

Resolución: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{3}{2-x}}{x+2} = \frac{3}{4-x^2}$

Para hallar el dominio, determinamos primero el dominio de las funciones f y g, y los puntos donde se anula $g(x)$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\};\ D(g) = \mathbb{R} - \{-2\},\ \text{ya que } g(-2) = 0$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = [D(f) \cap D(g)] - \{-2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Actividades

10. Si $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x + 3$ y $h(x) = \frac{2}{(x+1)}$, **halla**:

a. $f(x) + g(x)$

b. $f(x) + h(x)$

c. $h(x) - g(x)$

d. $g(x) - h(x)$

e. $f(x) \cdot g(x)$

f. $g(x) \cdot h(x)$

g. $\frac{f(x)}{g(x)}$

h. $\frac{f(x)}{h(x)}$

Y TAMBIÉN: ¿?

La composición de funciones cumple la propiedad asociativa:

$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Sin embargo, no cumple la propiedad conmutativa:

$(g \circ f) \neq (f \circ g)$

El dominio de $(g \circ f)$ es el conjunto de las x del dominio de f, tales que $f(x)$ esté en el dominio de g. $D(g \circ f) = \{x \in f(x) \mid f(x) \in D(g)\}$

8.4. Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, definimos la función compuesta de f y g, $(g \circ f)$, como la función obtenida al aplicar la función f a un conjunto real y, a continuación, la función g a su imagen.

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\qquad$ $x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$

Ejemplo 8

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = 3x + 6$, calcular las funciones compuestas $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$, y halla su dominio. ¿Son iguales estas funciones?

Comprensión

Operamos las expresiones analíticas en el orden preciso, es decir, empezando por la derecha.

Resolución

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 4) = 3(x^2 - 4) + 6 = 3x^2 - 12 + 6 = 3x^2 - 6$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+6) = (3x + 6)^2 - 4 = 9x^2 + 36x + 32$

En ambos casos las funciones son polinómicas, de forma que el dominio es $\mathbb{R}$. Observamos también que $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

Ejemplo 9

Dadas las funciones:

$f(x) = x + 3$, $g(x) = \dfrac{2x+3}{x^2}$ y $h(x) = \sqrt{\cos x}$,

Calcular: a. $f \circ g$; b. $g \circ f$; c. $g \circ f \circ h$.

Comprensión

La composición de funciones no es conmutativa. Por lo tanto, debemos respetar el orden de composición

Resolución

a. $f \circ g = f(g(x)) = \dfrac{2x+3}{x^2} + 3 = \dfrac{3x^2 + 2x + 3}{x^2}$

b. $g \circ f = g(f(x)) = \dfrac{2 \cdot (x+3) + 3}{(x+3)^2} = \dfrac{2x+9}{(x+3)^2}$

c. $g \circ f \circ h = g(f(h(x))) = g(\sqrt{\cos x} + 3) = \dfrac{2(\sqrt{\cos x} + 3) + 3}{(\sqrt{\cos x} + 3)^2} = \dfrac{2\sqrt{\cos x} + 9}{(\sqrt{\cos x} + 3)^2}$

Actividades

11. **Determina** $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ para:

a. $f(x) = x^3 - 1$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

b. $f(x) = x^2 + 5x + 6$, $\quad g(x) = \sqrt{x - 5}$

c. $f(x) = \dfrac{3}{2x}, \dfrac{3}{2y}$, $\quad g(x) = 2x^2 - 3$

d. $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $\quad g(x) = \sqrt{x} + 1$

e. $f(x) = 1 - 4x + x^2$, $\quad g(x) = \sqrt[3]{3x}$

f. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $\quad g(x) = \dfrac{x+3}{x}$

Problemas resueltos

A

1. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x - 2$, calcula la función suma $f + g$, la función diferencia $f - g$, la función producto $f \cdot g$, la función $f \cdot g$ y la función cociente $\frac{f}{g}$, y halla el dominio de cada una de ellas.

Solución

Para hallar la expresión analítica de $f + g$ sumamos las expresiones analíticas de las funciones f y g:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + x - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$$

Efectuamos un proceso análogo para f - g, f.g y $\frac{f}{g}$:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - (x-2) = \frac{1}{x} - x + 2$$

$$= \frac{1 - x^2 + 2x}{x} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \cdot (x-2) = \frac{x-2}{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{x-2} = \frac{1}{x\,(x-2)} = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

Para hallar el dominio de $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ determinamos primero el dominio de las funciones f y g:

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ $D(g) = \mathbb{R}$

Luego los dominios que pide el enunciado serán:

$D(f+g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

$D(f-g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

$D(f \times g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) - \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

B

1. Considera un triángulo equilátero de lado x, altura h y área A. Expresa:

a. La altura del triángulo en función del lado x.

b. El área del triángulo en función del lado x.

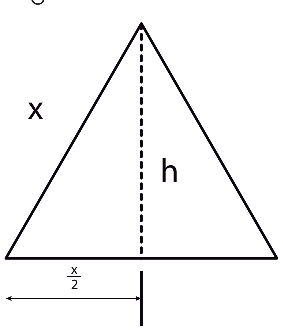
—Calcular el área del triángulo para $x = 2$.

Solución

- Dibujamos el triángulo e indicamos los datos del enunciado. La altura h es perpendicular al lado del triángulo y lo divide en dos mitades iguales de longitud $\frac{x}{2}$.

Por otro lado, el área del triángulo es:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{x \cdot h}{2}$$



a. Expresamos la altura del triángulo en función del lado aplicando el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

b. Para expresar el área del triángulo en función del lado sustituimos h en $A = \frac{x \cdot h}{2}$, con lo que resulta:

$$A = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

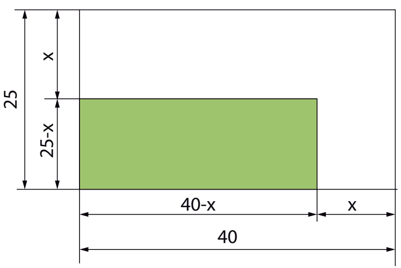
El área del triángulo para x = 2 es:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$$

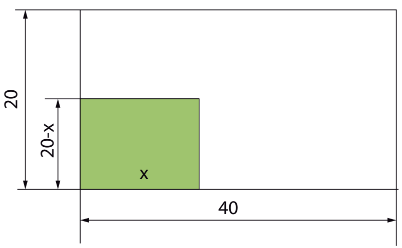
9. REPASO DE LA FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

Las funciones de segundo grado son funciones polinómicas de grado dos, cuya expresión algebraica es de la forma: $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$. Su representación gráfica es una parábola y son conocidas como funciones cuadráticas.

En este apartado repasaremos las funciones de segundo grado.



■ figura 12



■ figura 13

Una familia dispone de un terreno rectangular de 40 m de largo por 25 m de ancho.

Supongamos que desean edificar una superficie rectangular, en uno de los ángulos del terreno, y a igual distancia de los extremos, como se indica en la siguiente figura.

Si llamamos x a dicha distancia, podemos expresar la dependencia del área de la zona edificada, y, con relación al valor de x en la siguiente tabla de valores.

Distancia en metros (x)	0	5	10	15	20	25
Área en metros cuadrado (y)	1 000	700	450	250	100	0

Observa que el valor de x no puede ser ni mayor que 25 ni negativo.

La expresión algebraica de esta función viene dada por:

$y = (40 - x) \cdot (25 - x) \Rightarrow y = x^2 - 65x + 1\,000$

Decimos que es una función cuadrática y que su dominio es (0, 25). Su gráfica es un trozo de parábola cuyas ramas están abiertas hacia arriba.

Consideremos, ahora, que desean edificar una superficie rectangular cuyo perímetro sea de 40 m.

El área de la zona edificada dependerá de las dimensiones del rectángulo, como puedes observar en la figura de la derecha.

Si llamamos x a la base del rectángulo, la altura será $20 - x$, ya que el perímetro del rectángulo es de 40 m.

Y TAMBIÉN: ¿?

Un polinomio en una indeterminada x es una expresión algebraica que puede reducirse a la forma:

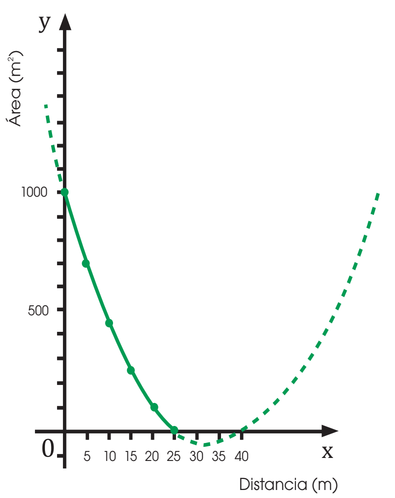
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural.

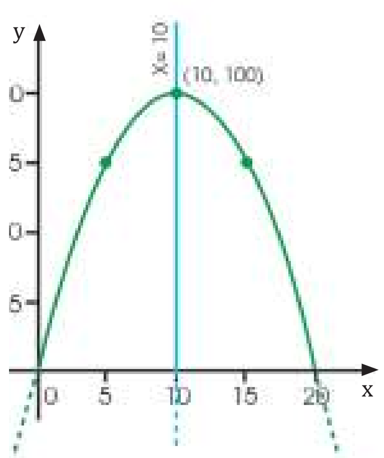
Una función polinómica viene dada por la expresión polinómica:

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

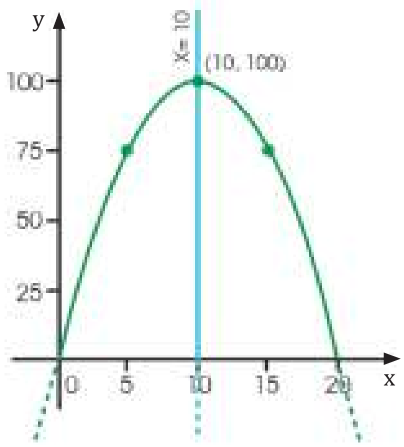
donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural.



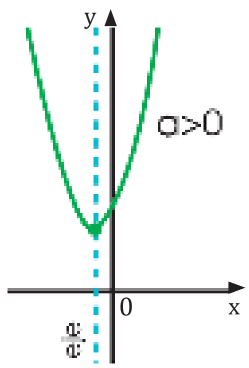
■ figura 10



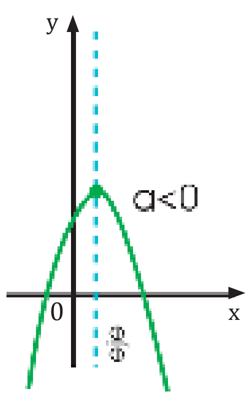
■ figura 11



■ figura 14



■ figura 15



■ figura 16

Podemos expresar la dependencia del área de la zona edificada, y en relación con la longitud x de la base del rectángulo, en la siguiente tabla de valores.

Base del rectángulo en metros (x)	0	5	10	15	20
Área en metros cuadrado (y)	0	75	100	75	0

Observa que el valor de x no puede ser ni mayor o igual que 20 ni menor o igual que 0.

La expresión algebraica de la función viene dada por:

$y = x \cdot (20 - x) \Rightarrow y = -x^2 + 20x$

Se trata de una función cuadrática, cuyo dominio es (0, 20).

Su gráfica es un trozo de parábola cuyas ramas están orientadas hacia abajo.

Observa que la figura 14 presenta un máximo absoluto en $x = 10$ y que es simétrica respecto a la recta $x = 10$. Decimos que el punto en el que se alcanza el máximo, es decir, el punto de coordenadas (10, 100), es el vértice de la parábola y que la recta $x = 10$ es el eje de la parábola.

Una función cuadrática es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Su gráfica es una curva llamada parábola. Esta curva cumple las siguientes características:

- Si $a > 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba y el vértice de la parábola es el punto cuya abscisa es el mínimo absoluto de la función.
- Si $a < 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia abajo y el vértice de la parábola es el punto cuya abscisa es el máximo absoluto de la función.
- Es simétrica respecto de la recta paralela al eje OY que pasa por el vértice.

Esta recta es el eje de la parábola.

Actividades

12. La base de un rectángulo excede en dos unidades a la altura. Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función que nos da el área del rectángulo con relación a la longitud de la altura.

—**Determina** la expresión algebraica de dicha función.

13. Desde una altura de 2 m, lanzamos una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s. La altura de la pelota respecto al suelo en función del tiempo viene dada por la expresión: $h(t) = 2 + 30t - 5t^2$.

—**Construye** una tabla de valores para el intervalo de t entre 0 y 6 s, y representa gráficamente dicha función.

Y TAMBIÉN: ¿?

Observa en la siguiente figura, las transformaciones llevadas a cabo para la parábola $y = x^2$.

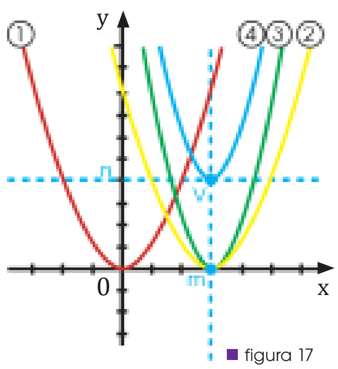


figura 17

Ecuación	Vértice
1. $y = x^2$	(0, 0)
2. $y = (x - m)^2$	(m, 0)
3. $y = a\,(x - m)^2$	(m, 0)
4. $y = a\,(x - m)^2 + n$	(m, n)
$a = k$	

9.1. Gráfica de la función cuadrática

La parábola es una curva simétrica respecto de su eje, que es la recta que pasa por su vértice y es paralela al eje OY.

Elementos de la parábola

A continuación, mostraremos cómo podemos obtener analíticamente los elementos más característicos de la parábola, que resulta de representar gráficamente una función cuadrática, cuya expresión algebraica es:

$y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Coordenadas del vértice

Observa la figura.

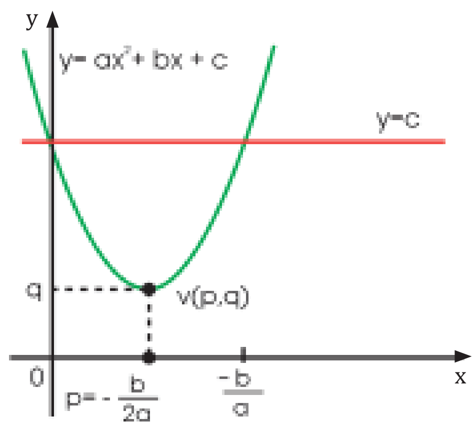


figura 18

Los puntos en que la parábola $y = a\,x^2 + b\,x + c$ corta a la recta $y = c$, los obtenemos resolviendo el siguiente sistema.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases}$$

Podemos simplificar: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{b}{a}$

Por simetría, observamos que la abscisa del vértice es el punto medio p.

$$p = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Así pues, la abscisa del vértice, que coincide con la ecuación del eje de la parábola, es: $x = -\frac{b}{2a}$

Una vez obtenido el valor de la abscisa, lo sustituimos en la ecuación de la parábola para hallar el correspondiente valor de la ordenada del vértice; $q = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Actividades

14. **Calcula** las coordenadas del vértice de las siguientes funciones.

a. $y = 3x^2 - x + 1$

b. $y = 6x^2 - 2x + 9$

c. $y = -10x^2 - 5x + 7$

d. $y = 8x^2 + 8x - 11$

Puntos de corte con el eje *OX*

Observa la figura.

Los puntos de corte de la parábola con el eje OX son los puntos de coordenadas

(x, y) cuando y = 0. Además, sabemos que:

$$y = ax^2 + bx + \ c = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

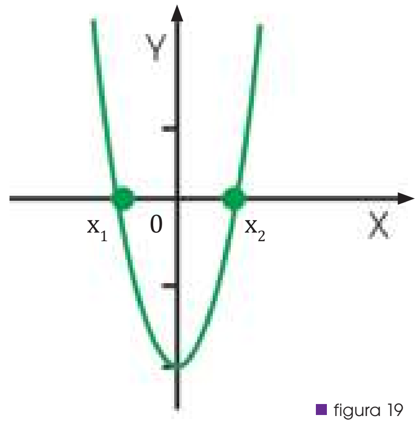


figura 19

Así, las coordenadas de los puntos de corte con el eje OX son de la forma $(x, 0)$, en los que el valor de x viene dado por las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Recuerda que si el discriminante de la ecuación de segundo grado es negativo, la ecuación no tiene solución y, por tanto, la parábola no corta el eje OX.

Punto de corte con el eje *OY*

Observa la figura.

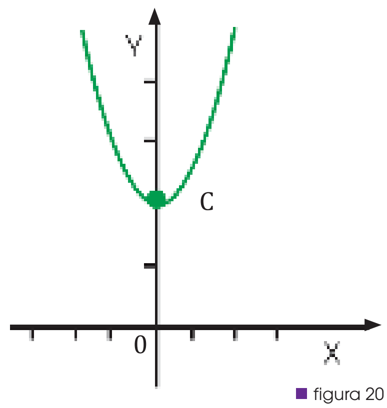


figura 20

El punto de corte de la parábola con el eje OY es el punto de coordenadas (x, y) cuando x = 0.

$$x = 0 \rightarrow y = a.\, 0^2 + b.\, 0 + c$$

Por lo tanto, el punto de corte es el de coordenadas $(0, c)$.

Ejemplo 10

Encontrar las coordenadas de los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = x^2 + 6\,x - 1$.

—Calculamos los puntos de corte con el eje OX. $y = 0$

$x^2 + 6\,x - 1 = 0 \Rightarrow$ aplicando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{40}}{2} = 0{,}16 \qquad x_2 = \frac{-6 - \sqrt{40}}{2} = -6{,}16$$

$x_1 = 0{,}16$; $x_2 = -6{,}16$

La parábola corta el eje OX en los puntos $(0, 16, 0)$ y $(- 6, 16, 0)$.

Calculamos los puntos de corte con el eje OY.

Cuando $x = 0 \rightarrow y = -1$

La parábola corta el eje OY en el punto $(0, -1)$.

Actividades

15. **Halla** analíticamente el vértice, el eje y los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las parábolas dadas por las siguientes funciones cuadráticas.

a. $y = 8x^2 - 2x$

b. $y = x^2 - 2\,x$

c. $y = -\,x^2 - 2\,x + 1$

d. $y = x^2 + 3$

Representación de la parábola

Veamos cómo podemos representar una parábola a partir de sus elementos característicos.

Para hacerlo, observaremos si las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba o hacia abajo, obtendremos las coordenadas del vértice, la ecuación del eje y, en caso de que corte los ejes, calcularemos las coordenadas de estos puntos de corte.

Ejemplo 11

Representar la gráfica de la función cuadrática cuya expresión algebraica es $y = -x^2 - 2$

—Escribimos los coeficientes a, b y c: $a = -1$, $b = 0$ y $c = -2$.

—Observamos la orientación de las ramas de la parábola: como $a = -1 < 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia abajo.

—Calculamos la abscisa del vértice, que coincide con la ecuación del eje.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$$

—Sustituimos el valor de la abscisa en la ecuación de la parábola para calcular la ordenada del vértice.

$y = -x^2 - 2 = -0^2 - 2 = -2$

Así pues, las coordenadas del vértice son: V (0, -2).

Observa que la recta $x = 0$ es el eje OY. Así, al representar la parábola, hemos de tener presente que es simétrica respecto del eje OY

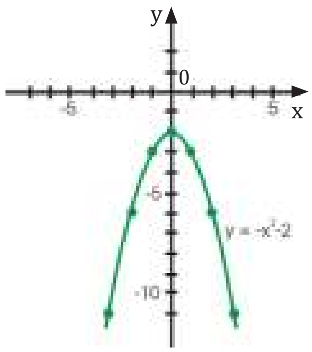
—Calculamos los puntos de corte con el eje OX que son los de la forma (x, y), tales que $y = 0$:

$y = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2 = 0$. El discriminante de esta ecuación es $b^2 - 4ac = -8 < 0$; por lo tanto, la ecuación no tiene solución. Así, la parábola no corta el eje OX.

—Calculamos el punto de corte con el eje OY, que es el de la forma (x, y) tal que $x = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = -0^2 - 2 = -2$. Así, este punto es el (0, -2).

Observa que solo hemos obtenido el punto (0, -2). Por ello, para representar la gráfica, calculamos las coordenadas de más puntos. Basta con calcular las coordenadas de puntos de abscisa positiva, ya que la gráfica es simétrica respecto al eje OY.

x	1	2	3
y	-3	-6	-11



Ejemplo 12

Representa la gráfica de la función cuadrática cuya expresión algebraica es $y = x^2 + 2x$.

—Escribimos los coeficientes a, b y c: $a = 1$, $b = 2$ y $c = 0$.

—Observamos que las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba, porque $a > 0$.

—Calculamos las coordenadas del vértice: $x = \frac{-b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$. Luego sustituimos el valor de x en la ecuación original: $y = x^2 + 2x$.

$y = (-1)^2 + 2.(-1) = -1$

—Sustituimos el valor de la abscisa en la ecuación de la parábola para calcular la ordenada del vértice.

$y = x^2 + x = (-1)^2 + 2.(-1) = -1$

Las coordenadas del vértice son: V (-1, -1).

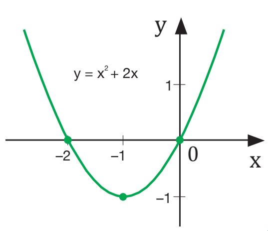
—Calculamos los puntos de corte con el eje OX que son los de la forma (x, y), tales que $y = 0$: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = -2$. Así, la parábola corta el eje OX en los puntos (0, 0) y (-2, 0).

—Calculamos el punto de corte con el eje OY, que es el de la forma (x, y) tal que $x = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 0^2.2 + 2 \cdot 0 = 0$.

Así, este punto es el (0, 0).

Hemos obtenido el eje y tres puntos de la parábola.

A partir de estos datos, representamos la gráfica.



Actividades

16. **Representa** las gráficas de las funciones cuadráticas de la actividad de la página anterior.

9.2. Tipos de funciones cuadráticas

Según su expresión algebraica, existen diferentes tipos de funciones cuadráticas.

Una función cuadrática es una expresión algebraica de la forma $y = a\,x^2 + b\,x + c$ donde $a \neq 0$. **Observa** la siguiente tabla en la que se muestran las distintas expresiones algebraicas obtenidas a partir de los valores de los coeficientes a, b y c.

TIC

Si accedes a la página http://www. mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Des cartes/parametros/graficacionparametros.htm, encontrarás parábolas de la forma $a\,(x - b)^2 + c$. Varía los parámetros a, b y c y observa las diferencias en la gráfica..

Valores de los coeficientes		Expresión algebraica
$b = 0$	$c = 0$	$y = ax^2$
	$c \neq 0$	$y = ax^2 + c$
$b \neq 0$	$c = 0$	$y = ax^2 + b\,x$
	$c \neq 0$	$y = ax^2 + b\,x + c$

Tabla 6

Si consideramos diferentes funciones, como pueden ser:

$y = x^2$ $\quad y = x^2 - 4$ $\quad y = x^2 - 2\,x$ $\quad y = x^2 - 2\,x - 3$

y las representamos gráficamente, observamos que cada expresión algebraica corresponde a una parábola diferente.

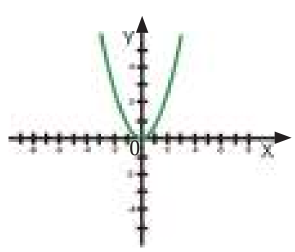
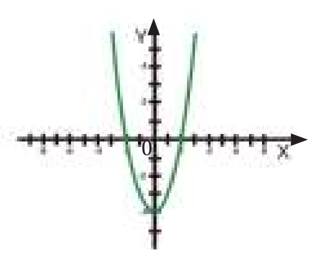
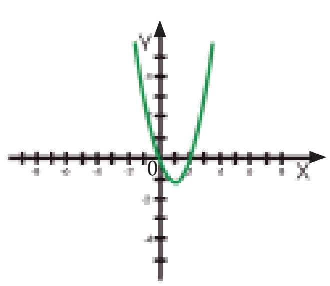
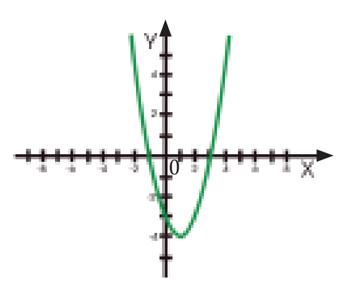
$y = x^2$	$y = x^2 - 4$
	
$y = x^2 - 2\,x$	$y = x^2 - 2\,x - 3$
	

Tabla 7

Actividades

17. **Clasifica** cada una de estas funciones, según su expresión algebraica, y lleva a cabo su representación gráfica:

a. $y = 2\,x^2$

b. $y = -\,x^2 + 3\,x - 5$

c. $y = -\,x^2 + 3$

d. $y = 3\,x^2 + 2\,x$

En esta tabla se recogen las gráficas de los diferentes tipos de función cuadrática según su expresión algebraica.

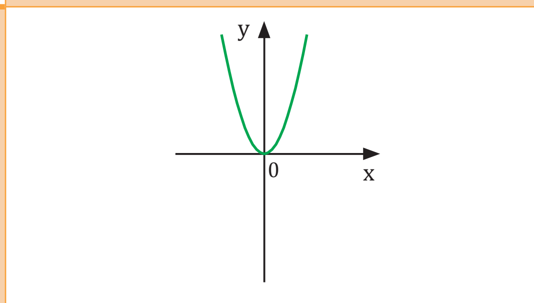
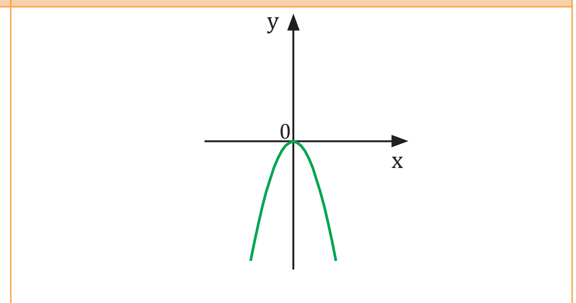
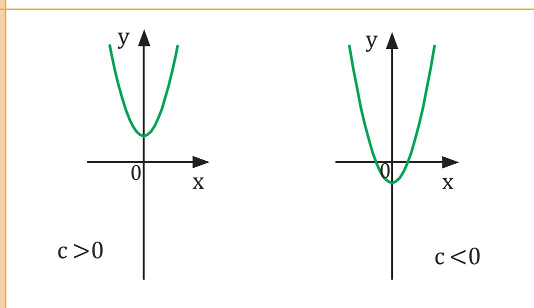
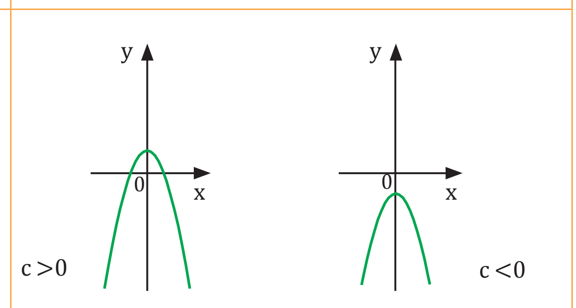
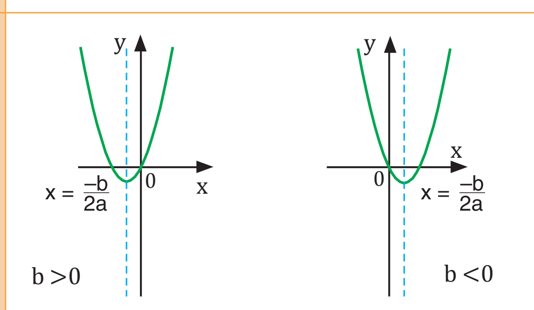
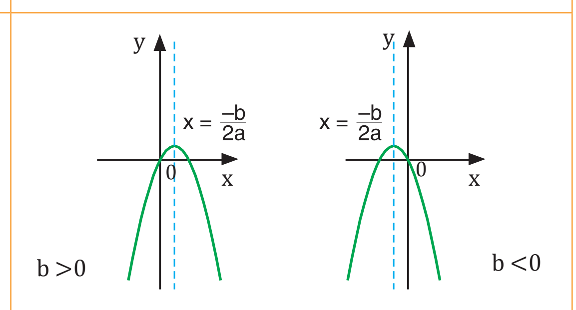
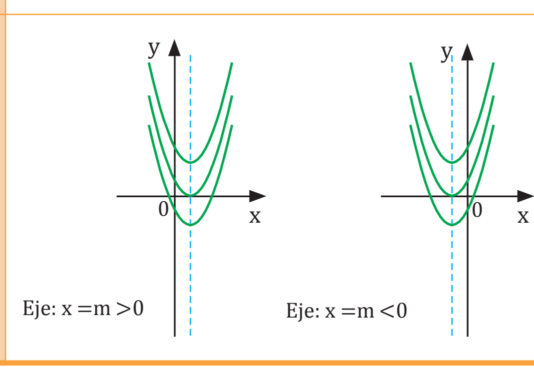
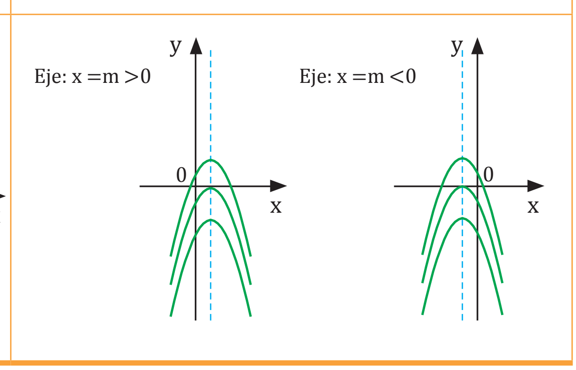
	$a > 0$	$a < 0$
$y = a x^2$		
$y = a x^2 + c$		
$y = a x^2 + b x$		
$y = a x^2 + b x + c$ $a, b, c \neq 0$		

Tabla 8

Actividades

18. **Halla** los puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice y la ecuación del eje de las gráficas de las funciones cuadráticas que se muestran a la derecha.

19. **Dibuja** la gráfica de una función cuadrática que no corte el eje OX y que tenga las ramas hacia arriba.

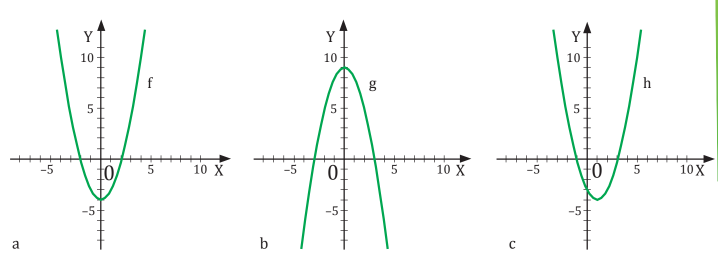


figura 21

A

Modelos matemáticos con funciones cuadráticas

1. Un granjero dispone de 24 m de valla para cercar una parcela rectangular. ¿Cuáles han de ser las dimensiones de la parcela para que el área encerrada sea la máxima?

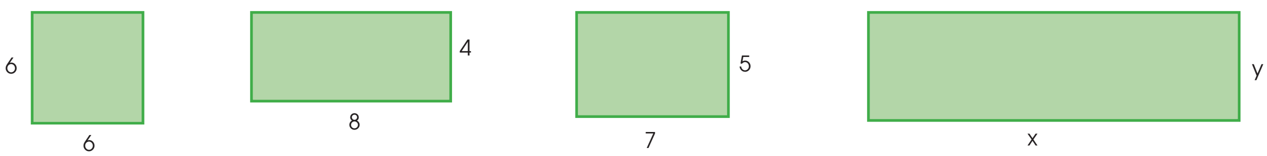
Solución

— Vuelve a leer el enunciado.

— Anota los datos que dispones y los que te piden.

Planificación de la resolución

Observamos que existen muchas parcelas rectangulares cuyo perímetro es 24 m. (te mostramos algunas de ellas). Se trata de hallar, entre todas las posibles, la que tiene el área máxima.



Ejecución del plan de resolución

a. Consideramos una parcela rectangular de base x y de altura y.

Puesto que el perímetro es 24 m, debe cumplirse:

$2x + 2y = 24$

O lo que es equivalente: $x + y = 12$

b. El área de esta parcela será: $A = x \cdot y$

Como $x + y = 12$, se tiene $y = 12 - x$.

Si sustituimos y en la fórmula del área, resulta:

$A = x \cdot y = x \cdot (12 - x) = -x^2 + 12x$

c. Finalmente, escribimos la función $f(x)$ que nos da el área de cada parcela en función de su base y la representamos gráficamente:

En la gráfica, se observa que esta función tiene un máximo en $x = 6$.

La altura del rectángulo será:

$y = 12 - x = 12 - 6 = 6$

El área será máxima cuando $x = 6$ e $y = 6$; es decir, cuando el rectángulo sea un cuadrado de 6 m de lado

Revisión del resultado

Revisa los cálculos realizados tanto en las operaciones como en la representación gráfica de la función.

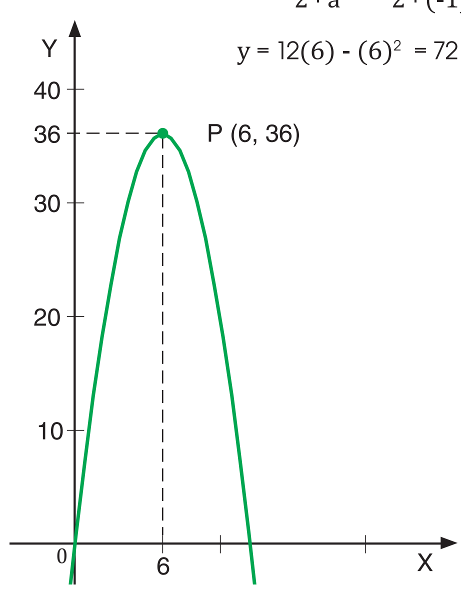
Comprueba que para los valores $x = 6$ e $y = 6$ el área es máxima.

Como el área de la parcela es:

$y = (12 - x).\ x$, es decir: $y = 12x - x^2$, en esta ecuación se puede observar que el valor de a es -1, por tanto , la gráfica es una parábola que abre hacia abajo, siendo así el vértice (altura), donde está el punto máximo. Luego, hallamos las coordenadas del vértice:

$$h = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-12}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12}{-2} = 6$$

$$y = 12(6) - (6)^2 = 72 - 36 = 36$$



Ejercicios y problemas propuestos

1 Función afín a trozos

1. **Halla** la expresión algebraica de la función afín, que pasa por el punto P (2, 7) y cuya representación gráfica es una recta paralela a la gráfica de la función y = 2 x.

2. **Halla** la expresión algebraica de la función afín, que pasa por el punto P (1, -5) y su ordenada en el origen es igual a -2.

3. **Halla** la expresión algebraica de la función afín cuya representación gráfica es una recta que pasa por el punto A (- 2, 1) y cuya pendiente es igual a $\frac{4}{3}$

4. **Representa** gráficamente la función f dada por la siguiente tabla de valores:

x	0	1	2	3
y	0	12	24	36

   a. **Indica** qué tipo de función has representado.

   b. **Determina** la pendiente de la recta y la ordenada en el origen.

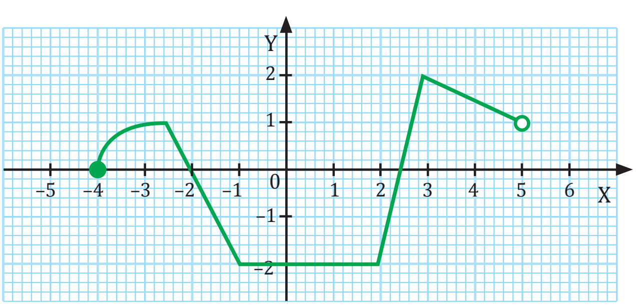
   c. **Halla** el dominio y el recorrido de la función.

   d. **Obtén** el valor de f para $x = -1$

5. **Representa** gráficamente la siguiente función e indica su dominio, recorrido y crecimiento.

$$y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x - 3 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

6. En la figura se representa la función f.

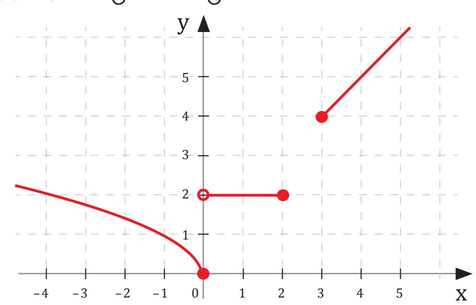


–**Indica** su dominio y su recorrido.

7. **Representa** gráficamente las siguientes funciones e **indica** su dominio y su recorrido.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

8. **Observa** la siguiente gráfica definida a trozos:



   a. **Halla** la función para cada tramo.

   b. **Halla** los períodos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, y los puntos de corte con los ejes.

9. Un corredor realiza una maratón (42 km) en 3 horas, de la siguiente manera: durante la primera hora, recorre 18 km; en la segunda, 16 km, momento en que sufre una pequeña lesión que le obliga a ser atendido durante 15 minutos; en los siguientes 30 minutos, realiza 7 km, se detiene durante 10 minutos y en 5 minutos hace 1 km.

   a. **Dibuja** la gráfica posición-tiempo y la gráfica velocidad-tiempo.

   b. **Define** el dominio, el recorrido, la continuidad y los intervalos de crecimiento de las gráficas

2 Ejercitación de funciones reales y operaciones con funciones

10. **Halla** el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = \sqrt{(x - 3)(x + 3)}$

   b. $f(x) = \sqrt{(x - 2)}$

   c. $f(x) = \sqrt{(x^2 + 2x + 1)}$

11. **Representa** gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Ejercicios y problemas propuestos

12. Queremos construir triángulos cuya área sea 6 cm².

   a. **Completa** la siguiente tabla de valores correspondiente a la función que relaciona la base con la altura, de cada uno de los triángulos:

Base en cm (x)	2	4	6	8	10
Altura en cm (y)					

   b. Representa gráficamente la función obtenida y escribe su expresión algebraica. ¿De qué tipo de función se trata?

13. El tiempo que tarda un auto en recorrer una determinada distancia depende de la velocidad es la que este circule. La función que relaciona la velocidad constante a la que circula un carro con el tiempo que tarda en recorrer 600 km viene dada por esta tabla de valores:

Velocidad en km/h (x)	20	40	60	80	100	120
Tiempo en horas (y)	30	15	10	7,5	6	5

   a. **Representa** gráficamente la función dada por esta tabla de valores y escribe su expresión algebraica. ¿De qué tipo de función se trata?

   b. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 600 km un auto cuya velocidad constante es de 75 km/h?

14. En una heladería ofrecen un servicio de venta a domicilio por el que debe pagarse una cantidad fija por el envío más el precio de los helados. En uno de los pedidos, por 20 paquetes de helados, pagamos $103, y en otro pedido, por 30 paquetes de helados, pagamos $153.

   a. Halla la expresión algebraica de la función lineal que relaciona el número de paquetes de helados comprados con el importe del envío.

   b. ¿Cuánto deberemos pagar por un envío de 25 paquetes de helados?

15. Si un objeto realiza dos movimientos definidos bajo las funciones:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

Calcula:

   a. $f(x) - g(x)$ $\qquad$ c. $(f \circ g)(x)$

   b. $f(x) \cdot g(x)$ $\qquad$ d. $(g \circ f)(x)$

16. Laura y Gonzalo han visto dos ofertas diferentes por el mismo ordenador: *Oferta A*: su precio es $200 más el 2% mensual (del precio inicial), si pagas a plazos. *Oferta B*: su precio es $220, más el 1% mensual (del precio inicial), a partir del sexto mes su pago.

   a. **Representa** ambas ofertas en un mismo gráfico (durante el primer año).

   b. ¿En qué momento es mejor cada oferta?

   c. ¿Cuánto y cuándo es la diferencia máxima entre las dos ofertas?

17. Un ciclista recorre 30 km en 1 hora, descansa 20 minutos, reanuda la marcha y avanza 30 km en 50 minutos, y se detiene a hidratarse y alimentarse durante 30 minutos. Para regresar, emplea 2 horas y 35 minutos.

   a. **Representa** la función que relaciona la distancia con el punto de partida y el tiempo.

   b. **Define** el dominio y el recorrido de la función.

   c. **Define** el corte con los ejes.

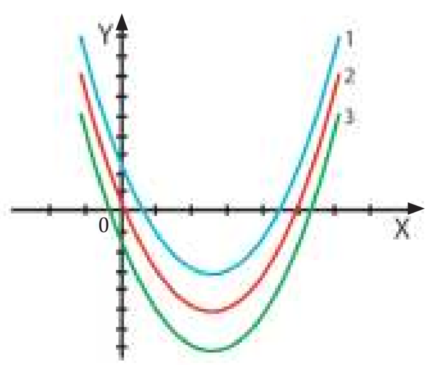
   d. **Indica** los tramos de crecimiento y decrecimiento.

   e. ¿Tiene máximos y mínimos relativos?

3 Función cuadrática

18. **Observa** que en cada una de las expresiones algebraicas de las siguientes funciones cuadráticas: $f(x) = x^2 - 5x + 1$, $g(x) = x^2 - 5x + 3$ y $h(x) = x^2 - 5x - 1$, únicamente varía el término independiente.

   a. **Relaciona** dichas funciones con estos gráficos:



   b. ¿Puede obtenerse la gráfica de la función g trasladando 2 unidades hacia arriba la gráfica de la función f? ¿Y la de la función h trasladando 4 unidades hacia abajo la de la función g?

Ejercicios y problemas propuestos

19. **Determina** la expresión algebraica de la función cuadrática que cumple las siguientes condiciones:
    - La imagen de 0 es 24.
    - Pasa por el punto P (3, 0).

20. **Halla** el eje de simetría y las coordenadas del vértice de cada una de las siguientes parábolas sin representarlas gráficamente:

    a. $y = 2x^2 + 4x - 6$
    b. $y = -x^2 + 2$
    c. $y = -2x^2 + x$
    d. $y = x^2 + 8x + 15$

21. **Halla** el número de puntos de corte con el eje de abscisas de las siguientes parábolas:

    a. $y = x^2 + 10x + 25$
    b. $y = -x^2 - 8x + 9$
    c. $y = x^2 - 3x + 2$
    d. $y = 2x^2 - x + 1$

22. **Representa** gráficamente las siguientes funciones de segundo grado:

    a. $y = x^2 - 6x - 7$
    b. $y = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4}$
    c. $y = -x^2 + 12x - 36$
    d. $y = 2x^2 - 4x$
    e. $y = -x^2 + 5x - 4$
    f. $y = x^2 + 3$

    —**Halla** el dominio y el recorrido de cada función. ¿Qué características presenta cada una de las funciones?

23. **Calcula** los coeficientes a, b y c de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ si sabemos que pasa por los puntos (-1, 10), (0, 2) y (2, 4).

24. **Representa** gráficamente las siguientes funciones:

    a. $y = 2x^2 - 2$
    b. $y = 2x^2 + 3x - 2$
    c. $y = x^2 - 2x$
    d. $y = -x^2 + 7$

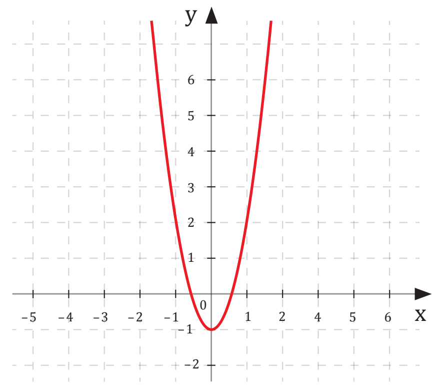
    A partir de las gráficas obtenidas, **determina** las siguientes características de cada función: dominio y recorrido; puntos de corte con los ejes; intervalos de crecimiento y decrecimiento; y máximos y mínimos absolutos y relativos.

25. **Determina** las coordenadas del vértice de la parábola $y = 2x^2 - x + 3$.

26. **Halla** el valor de c en la función $y = 2x^2 - 5x + c$ si su gráfica pasa por el punto (-1, 3).

27. **Efectúa** las siguientes transformaciones, a partir de la función $f(x)$ representada en el gráfico:

    a. $f(x) - 2$
    b. $f(x + 3)$
    c. $f(-x)$
    d. $-f(x)$



28. **Halla** la función cuadrática cuya gráfica tiene su vértice en el punto V (-1, 2) y se obtiene por traslación vertical de la parábola $y = 3x^2 + 6x$.

29. Si $f(x) = x^2$, representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes funciones:

    a. $f(x) - 2$
    b. $f(x + 4)$
    c. $f(2x)$
    d. $f(0{,}5x)$

30. Una persona que se dedica a solucionar problemas informáticos, de particulares, cobra $20 por el desplazamiento y $30 por cada hora de trabajo.

    a. **Construye** una tabla de valores y **representa** gráficamente la función que relaciona el número de horas de trabajo de una salida con el importe que cobrará.

    b. **Halla** la expresión algebraica de la función y **determina** el número de horas que ha trabajado en una salida si ha cobrado $95.

31. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 4 141. ¿Cuáles son estos números?

32. Si lanzamos una pelota verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 40 m/s, la altura que esta alcanza respecto al punto de lanzamiento en función del tiempo viene dada por la expresión $h(t) = 40t - 5t^2$.

    a. **Construye** una tabla de valores y **representa** gráficamente dicha función.

    b. **Determina** analítica y gráficamente la altura que va alcanzando la pelota en función del tiempo, durante los primeros 8 segundos.

Ejercicios y problemas propuestos

33. El movimiento de un proyectil viene dado por la siguiente ecuación: $f(t) = 5 + 3t - 4.9t^2$; $t \geq 0$

    a. **Representa** la función.

    b. **Representa** $f(t + 2)$.

    c. **Representa** $f(t)$.

    d. **Representa** $-f(t)$.

34. Se lanza un globo sonda de 2 m^3 de volumen. Cada 100 m de subida, aumenta el volumen en 0,1 m^3 hasta los 800 m. Luego sube 200 m sin aumentarlo y, después, incrementa 0,2 m^3 cada 100 m durante 1 km. Finalmente, disminuye 0,2 m^3 al subir los últimos 500 m antes de explotar.

    a. **Representa** el volumen del globo en función de la altura e indica el dominio, el recorrido, los extremos relativos, los tramos de crecimiento y el decrecimiento de la función.

    b. **Calcula** el volumen cuando el globo está a 400 m de altura.

35. La velocidad de un misil (en metros por segundos) t después de ser lanzado esta dada por la función $v(t) = 54t - 2t^2 + 56$.

    a. ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el misil y en qué momento se alcanza?

    b. ¿Luego de cuánto tiempo el misil se detiene?

36. Un orfebre quiere conocer las dimensiones de un grabado con forma rectangular, sabiendo que uno de sus lados mide 3 cm más que el otro y que su área es igual a 70 cm^2.

37. Las ganancias máximas de una empresa productora de estampitas para cada (x) unidad vendida se ha calculado como $G(x) = 120x - 2x^2 - 800$, siendo x la cantidad de estampitas que se producen cada día.

    a. **Expresa** la ecuación en la forma estándar

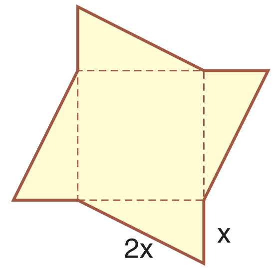
    b. ¿Cuál es la ganancia máxima que puede obtener?

    c. ¿A qué precio de venta unitario se obtiene la máxima ganancia?

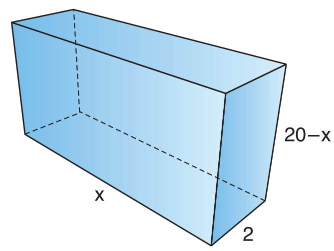
    d. **Calcula** el número de unidades necesarias para obtener una ganancia de 2 400.

    e. Si se venden 75 unidades ¿cuánto es la ganancia?

38. **Observa** la figura y **determina** las expresiones algebraicas de las funciones que permiten relacionar el área de la figura y la diagonal del cuadrado con la longitud x.



39. **Determina** la función que relaciona el volumen de la figura con la variable x (en metros) y calcula el volumen máximo.



40. En esta tabla aparecen algunos valores correspondientes a una función de proporcionalidad inversa:

x	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3		5
y							$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{10}$	

    a. **Determina** la constante de proporcionalidad inversa y la expresión algebraica de la función.

    b. **Completa** la tabla de valores y **representa** gráficamente la función.

41. **Representa** una recta que pase por los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (1, 4)$. A continuación, en el mismo gráfico, **construye** una parábola con vértice en $(0, 0)$ y que pase por el punto $(1, 4)$. **Halla** la expresión algebraica de ambas.

42. Si de un triángulo rectángulo conocemos que uno de los catetos es $b = 3$ cm:

    a. **Representa** la hipotenusa a como función dependiente del cateto c.

    b. **Representa** el cateto c como función dependiente de la hipotenusa a.

    c. ¿Qué medidas puede tener la hipotenusa?

Ejercicios y problemas propuestos

43. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad g(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$

a. **Calcula** el valor de las funciones para $x = 2$ y para $x = 4$.

b. **Efectúa** el estudio de las dos funciones.

c. **Representa** las dos funciones.

d. **Halla** los puntos de corte entre las dos funciones.

e. **Calcula** $(f \circ g)$

f. **Efectúa** el estudio de la función obtenida en el apartado anterior.

44. Dada la siguiente función: $f(x) = \sqrt{16 + b^2}$

Calcula:

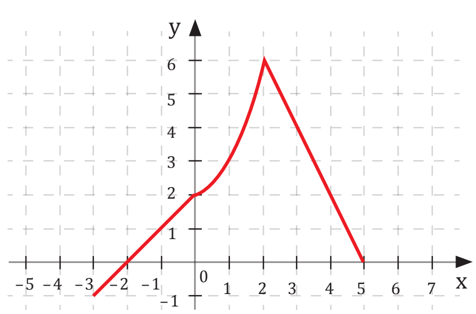
a. El valor de la función para $b = 3$ y $b = 7$.

b. **Halla** el dominio y el recorrido.

c. **Representa** la función.

d. **Halla** los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, los puntos de corte con los ejes, la periodicidad y la simetría de la función.

45. **Halla** el dominio, el recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, la intersección con los ejes y la periodicidad de las siguientes funciones:



46. **Considera** las funciones $f(x) = x^3 - 4x + 6$ y $g(x) = 2x^2 + 5$, y **calcula**:

a. $(f \circ g)(x)$

b. $(g \circ f)(x)$

c. $(f \circ g)(2)$

d. $(g \circ f)(2)$

47. **Calcula** la función suma y la función producto y **halla** el dominio de ambas en los siguientes casos:

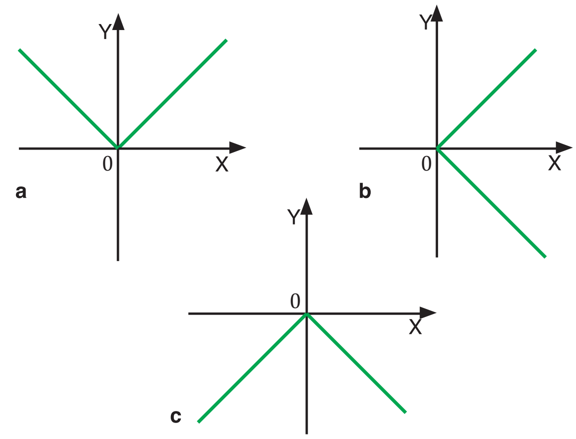
a. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2;$ $\qquad g(x) = x + 4$

b. $f(x) = x^2 - 2;$ $\qquad g(x) = \frac{x}{x-4}$

c. $f(x) = \frac{3x}{x-1};$ $\qquad g(x) = \frac{x-2}{x-+1}$

48. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la siguiente función? $f(x) = -\frac{4}{3}x$

49. **Señala** cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $f(x) = |-x|$.



50. **Halla** el dominio de la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -2 \\ \frac{2}{x^2 - 4} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3 - 3}{x - 5} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

51. **Representa** gráficamente, en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

a. $f(x) = \frac{1}{3x}$ $\qquad$ b. $g(x) = \frac{3}{x}$

—**Compara** el comportamiento de ambas funciones conforme x se hace cada vez mayor y cada vez menor.

2 Resumen

1. Una función afín es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $y = mx + b \; (m \neq 0)$, siendo b la ordenada en el origen. Su gráfica es una recta que pasa por el punto $(0, b)$ y tiene pendiente m.
2. Una función cuadrática es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $y = ax^2 + bx + c \; (a \neq 0)$. Su gráfica es una curva llamada parábola. Esta curva cumple las siguientes características:
   - Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y el vértice de la parábola es el punto cuya abscisa es el mínimo absoluto de la función.
   - Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y el vértice de la parábola es el punto cuya abscisa es el máximo absoluto de la función.
   - Es simétrica respecto de la recta paralela al eje OY que pasa por el vértice. Esta recta es el eje de la parábola y coincide con la abscisa del vértice. Su ecuación es: $x = \frac{-b}{2a}$
3. La función que asigna a la variable independiente x el valor $y = k/x \; (k \neq 0)$ se llama función de proporcionalidad inversa, en la que k es la constante de proporcionalidad inversa.
   - Las funciones en las que la variable independiente x está afectada solo por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación se llaman funciones algebraicas.
4. Una función polinómica es aquella cuya expresión analítica viene dada por un polinomio: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

   Se llama grado de una función polinómica al grado del polinomio de su expresión analítica.
5. En las funciones polinómicas:

   $D(f) = \mathbb{R}$
6. Una función irracional es aquella en cuya expresión analítica la variable independiente x aparece bajo el signo radical.

   $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$; con $g(x)$ racional

   En este tipo de funciones irracionales:

   Si el índice n del radical es par: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\}$
7. Una función definida a trozos es aquella cuya expresión analítica no es única, sino que depende del valor de la variable independiente.

Las operaciones que se pueden efectuar con funciones son:

Adición	Sustracción
La función suma de f y g es la fúnción que asigna a cada números real x la suma de las imágenes por la función f y por la función g: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	La función diferencia de f y g es la fúnción que asigna a cada números real x la diferencia de las imágenes por la función f y por la función g: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Multiplicación	**División**
La función producto de f y g es la fúnción que asigna a cada números real x la producto de las imágenes por la función f y por la función g: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	La función cociente de f y g es la fúnción que asigna a cada números real x el cociente de las imágenes por la función f y por la función g: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

Para finalizar

1 **Halla** $f(0)$, $f(-2)$ y $f(3)$ para las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

b. $f(x) = x - 3$

c. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

d. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2} + 2$

2 **Halla** el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

b. $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x + 1}{x - 3}}$

c. $h(x) = \sqrt[4]{-x^2 + 1}$

d. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt[3]{x - 4}}$

3 Un fabricante vende celulares a un precio medio de \$175,35 la unidad. El coste por fabricar los celulares es de \$125,60 por unidad, más un coste fijo, independiente de la cantidad de celulares vendidos, de \$5 200 000, correspondiente a la inversión inicial. **Determina**:

a. La función del valor total de las ventas (en \$), en función del número de unidades vendidas.

b. La función del coste total, en función del número de unidades vendidas.

c. La función del beneficio total, en función del número de unidades vendidas.

d. El número de unidades vendidas a partir del que el fabricante empezará a tener beneficios.

4 Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sqrt{x - 2}$, **calcula**:

a. $(f \circ g)(x)$

b. $(g \circ f)(x)$

c. $(g \circ g)(x)$

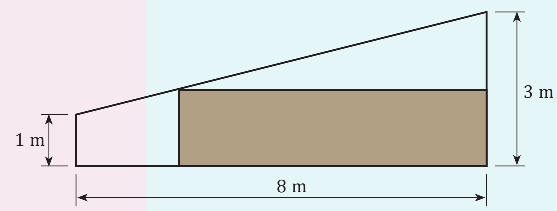
d. $(f \circ g \circ f)(x)$

5 Un corredor realiza una maratón (42 km) en 3 horas, de la siguiente manera: durante la primera hora, recorre 18 km; en la segunda, 16 km, momento en que sufre una pequeña lesión que le obliga a ser atendido durante 15 minutos; en los siguientes 30 minutos, realiza 7 km, para durante 10 minutos y en 5 minutos hace 1 km.

a. **Dibuja** la gráfica posición-tiempo y la gráfica velocidad-tiempo.

b. **Define** el dominio, el recorrido, la continuidad y los intervalos de crecimiento de las gráficas.

6 En la figura se muestran las dimensiones de la pared de una habitación, que está bajo el techo inclinado de una casa. Se quiere construir en esta pared un armario rectangular, similar al que está sombreado.



a. **Halla** la función que relaciona el área del rectángulo con la longitud de su base.

b. **Representa** gráficamente la función que has encontrado.

EVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad temática?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?

- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

La idea actual de función

El concepto de función, tal y como lo conocemos hoy, fue estudiado y precisado por el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857). El fue pionero en el análisis matemático de las funciones al eliminar de ellas toda referencia inicial a expresiones formales y basarlas en la idea de correspondencia entre conjuntos.

SENTIDO CRÍTICO

¿Baja el precio del taxi?

http://goo.gl/9xdsQ3

El precio en este tipo de transporte suele condicionarse por dos conceptos básicos: la bajada de bandera y el precio por kilómetro recorrido. Imagina que se publica el siguiente cambio de tarifas: $1,84 por bajada de bandera y $1,05 por kilómetro recorrido. A partir de estos datos:

https://goo.gl/gOsTvv

–Convierte a función el precio de un recorrido, según cada una de las tarifas, y, mediante alguna calculadora gráfica, encuentra qué distancia puede hacerse en taxi con las dos tarifas de manera que el precio final sea el mismo.

–A igual recorrido, ¿realmente disminuye el precio del taxi, pese a que hay una rebaja en uno de los conceptos? ¿Dónde suele ponerse el énfasis al anunciar este tipo de cambios? **Razona** tus respuestas.

SI YO FUERA....

http://goo.gl/1duZ6s

Economista

Trabajaría en alguna empresa desempeñando las siguientes funciones: en tesorería o en finanzas, manejando los activos líquidos; en presupuestos y en planificación, optimizando los procesos y beneficios de la empresa; en la producción y en el análisis de información estadística del entorno nacional e internacional, útil para mejorar la toma de decisiones; pero también podría trabajar en centros de investigación, realizando estudios generales o concretos, para proponer alternativas de solución a problemas específicos en este mundo cada vez más globalizado o en organismos internacionales, evaluando y proponiendo soluciones en temas de pobreza, finanzas, trabajo y otros .
Para ser economista, debo tener una base muy firme en Matemáticas, pero sobre todo en el estudio de funciones, para analizar gastos, costos e ingresos de una empresa, optimización de procesos de producción, etcétera., todo esto para la toma de decisiones futuras.

Las funciones de un economista tienen una gran aplicación en el campo de las Ciencias Sociales. Una de las funciones más utilizadas por los economistas son las llamadas *curvas de oferta-demanda*.

¿Cómo se mantiene un avión jumbo en el aire? (Función lineal y cuadrática). Cuando un ala se mueve con una cierta velocidad, se genera sobre la misma una zona de baja presión y, bajo la misma, una zona de alta presión. Al juego de estas dos presiones se debe el «sostén» o «sustentación», una fuerza que se opone al peso del avión. Así, para proyectar en vuelo un avión, es indispensable saber de qué magnitudes depende esta fuerza.

3 Límite y derivadas de funciones

https://goo.gl/0sJMdz

CONTENIDOS:

1. Noción intuitiva de límite
2. Límites laterales
3. Límites en el infinito
4. Cálculo de límites
5. Indeterminaciones
6. Continuidad de funciones
7. Cociente incremental o tasa de variación
8. Tasa de variación instantánea
9. Interpretación geométrica y física del cociente incremental
10. Derivada de una función en un punto
11. Interpretación geométrica de la derivada
12. Interpretación física de la derivada
13. Función derivada
14. Aplicación de las derivadas
15. Problemas de optimización
16. Derivadas y Tic´s. Geogebra

Noticia:

Los límites, su estudio y su relación con las ciencias y la filosofía son temas que se abordan en numerosas publicaciones como por ejemplo:

- John D. Barrow. Imposibilidad: los límites de la ciencia y la ciencia de los límites. Gedisa, 1999.
- Martin Bojowald. Antes del big bang. Debate, 2011.

Web:

Una de las paradojas más famosas que propuso Zenón de Elea en el siglo V a. C., y que la intuición humana tardó siglos en resolver matemáticamente, es «la paradoja de Aquiles y la tortuga». En el siguiente enlace podrás ampliar la información sobre esta paradoja: http://links.edebe.com/c2z

EN CONTEXTO

1. **Lee** el artículo sobre *La paradoja de Aquiles y la tortuga* y **responde** en grupo:

   a. Según la paradoja, ¿alcanzará Aquiles a la tortuga? ¿De qué tipo de progresión se trata? ¿Cuál es la fórmula que expresa la suma de los n + 1 primeros términos?

   b. Según tu experiencia, ¿alcanzará Aquiles a la tortuga? ¿Qué no tiene en cuenta la paradoja? **Explícalo** con tus propias palabras.

2. Desde el *big bang*, el universo está en continua expansión. Esta circunstancia invita a reflexionar sobre sus límites.

   - Si suponemos que el universo se ha expandido a la velocidad de la luz, ¿cuál sería el límite observable del universo?
   - El universo, ¿está en expansión infinitamente? ¿Llegará a un límite y volverá a contraerse o tendrá otro final diferente?

   a. **Expresa** el aspecto esencial de estas respuestas en forma de periodístico.

   b. **Anota** en una lista conjunta todos los titulares. **Discute** la idoneidad de los distintos propuestos.

   c. **Cambia** tu titular si lo estimas conveniente. ¿En qué difiere del anterior?

1. NOCIÓN INTUITIVA DE LÍMITE

La palabra límite procede, etimológicamente hablando, del latín. En concreto procede del sustantivo *limes*, que puede traducirse como frontera o borde.

La noción de límite tiene múltiples acepciones. Puede tratarse de una línea que separa dos territorios, de un extremo a que llega un determinado tiempo o de una restricción o limitación.

Para la matemática, un límite es una magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los términos de una secuencia infinita de magnitudes.

Este concepto involucra el entender el comportamiento de una función cuando la variable independiente está «muy cerca» de un número «a» pero sin llegar a tomar ese valor.

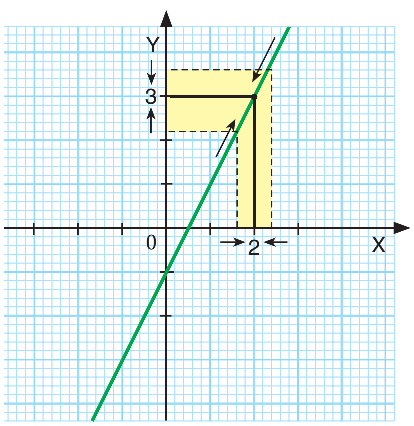


figura 1

Límite de una función en un punto

Considera la función $f(x) = 2x - 1$.

Elaboramos una tabla en la que damos a x valores cercanos a 2, aunque menores (tabla 1). De igual forma, elaboramos otra tabla en la que damos a x valores cercanos a 2, aunque mayores (tabla 2).

Vemos que, en ambos casos, cuanto más se acerca x a 2, más se aproxima su imagen por f a 3.

Podemos llegar a esta misma conclusión si observamos la gráfica de f. A medida que estrechamos el entorno de $x = 2$, se estrecha también el entorno a $y = 3$.

Decimos entonces que, el límite de la función f cuando x tiende 2 es 3.

Lo simbolizamos escribiendo: $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

Tabla 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,9	2,8	2,1	3,2
1,99	2,98	2,01	3,02
1,999	2,998	2,001	3,002
......	......	......	......

Tabla 1. *Tabla 2.*

Observa que, en este caso, el valor del límite que hemos hallado coincide con $f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$. Sin embargo, esto no ha de ser necesariamente así. Veamos algunos ejemplos.

Consideraremos únicamente el cálculo sistemático de límites de funciones polinómicas y racionales.

Ejemplo 1

Hallemos $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ 2 & \text{si } x\neq 1 \end{cases}$

Elaboremos las siguientes tablas de valores de $f(x)$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,9	3,6	1,01	4,0401
0,99	3,9601	1,001	4,004001
0,999	3,996001	1,1	4,41
......	......	......	......

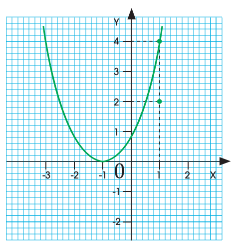
De acuerdo con las tablas, vemos que: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$

En este caso el límite no coincide con $f(1)$, ya que:

$f(1)=2$ Así pues:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

Este resultado se corresponde con lo que podemos observar en la gráfica de f.



Ejemplo 2

Hallemos $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x) = \dfrac{x^3-7x^2+6x}{1-x}$

Elaboremos las siguientes tablas de valores de $f(x)$

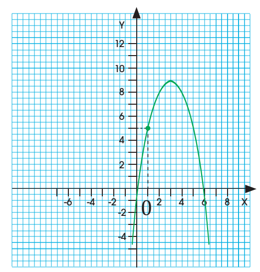
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,9	4,59	1,01	5,0399
0,99	4,95	1,001	5,00399
0,999	4,99	1,1	5,39
......	......	......	......

De acuerdo con las tablas, vemos que:
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$

En este caso el límite no coincide con $f(1)$, ya que $f(1)$ está definida.

En efecto, 1 no pertenece al dominio de f, puesto que anula su denominador.

Este resultado corresponde con lo que podemos observar en la gráfica de f.



1.1 Límites de funciones polinómicas y racionales en un punto

En general, para hallar el límite de una función en un punto, bastará con sustituir dicho punto en la función $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

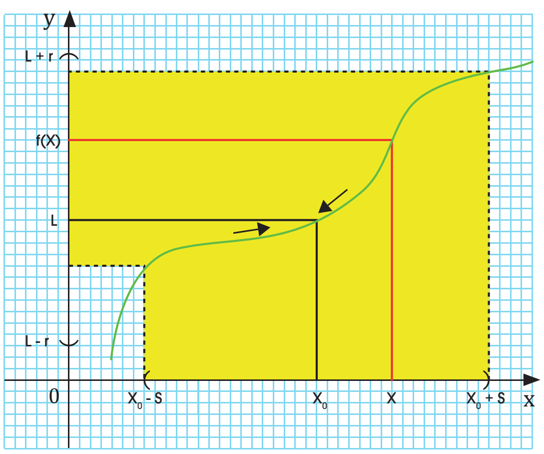


figura 2

El límite de una función f cuando x tiende a x_0 es el valor, en caso de que exista, al que se aproxima $f(x)$ cuando x se acerca a x_0.

Y TAMBIÉN:

Dado cualquier número real a y cualquier número real positivo r, llamamos entorno de centro a y radio r, y lo representamos por Er (a), al intervalo abierto de extremos

$a-r$ y $a+r$: $(a-r, a+r)$

2. LÍMITES LATERALES

Considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x<5 \\ 4-x & \text{si } x\geq 5 \end{cases}$

Elaboremos una tabla en la que damos a x valores cercanos a 5, aunque menores (tabla 3). Como vemos, al acercarse x a 5, su imagen por f se aproxima a 9.

x	$f(x)$
4,9	8,8
4,99	8,98
4,999	8,998
......	......

Tabla 2

x	$f(x)$
5,1	-1,1
5,01	-1,01
5,001	-1,001
......	......

Tabla 3

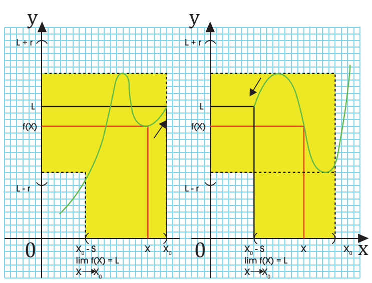


figura 3

Decimos que el límite lateral de f cuando x tiende a 5 por la izquierda es 9. Lo simbolizamos escribiendo:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 9 \quad \text{en general:} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

De igual manera podemos elaborar una tabla en la que demos a x valores cercanos a 5, aunque mayores. En este caso, al acercarse x a 5, su imagen por f se aproxima a −1.

Decimos que, el límite lateral de f cuando x tiende a 5 por la derecha es −1.

Lo simboliza $\lim_{x\to 5^+} f(x) = -1$ en general : $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$

Relación entre el límite y los límites laterales

De acuerdo con la definición de límite de una función f en un punto x_0, los valores a los que se aproximan las imágenes por f cuando x se acerca a x_0, tanto por la izquierda como por la derecha, han de ser iguales.

Sin embargo, en el ejemplo anterior hemos visto que el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha no coincidía:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 9 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \lim_{x\to 5^-} f(x) \neq \lim_{x\to 5^+} f(x)$$

Por tanto, diremos que no existe. En general:

La condición necesaria y suficiente para que exista el límite de una función en un punto es que existan los dos límites laterales de esa función en ese punto y que ambos coincidan.

Actividades

1. **Calcula** los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 2} 3x-1$

c. $\lim\limits_{x\to 3} x-2$

b. $\lim\limits_{x\to 90^\circ} \text{sen } x$

d. $\lim\limits_{x\to e} \ln x$

3. LÍMITES EN EL INFINITO

En muchas ocasiones, nos interesará estudiar hacia dónde tiende la función cuando x crece indefinidamente $(x \to +\infty)$ o decrece indefinidamente $(x \to -\infty)$, es decir, ver cómo la función se comporta en el infinito. En el infinito, la función puede tender a un número real L, puede crecer infinitamente $(+\infty)$ o decrecer infinitamente $(-\infty)$.

Se denomina límite infinito de $f(x)$, y se expresa $\lim_{x\to\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, al valor L al que se acercan las imágenes de la función cuando x crece (o decrece) indefinidamente.

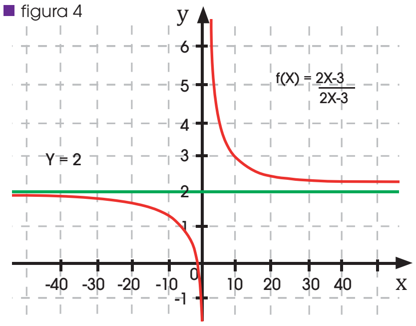
Para referirnos a estos límites, escribimos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Si alguno de estos límites existe y es un número real $(L \in \mathbb{R})$, la gráfica de la función tiende a la recta $y = L$ sin llegar a tocarla. Diremos que el límite de la función, cuando x tiende a $+\infty$ $(o -\infty)$, es L.

Si por el contrario, el valor de L no tiende a ningún número real sino que crece (o decrece) indefinidamente con la función, diremos que el límite de la función, cuando x tiende a $+\infty$ $(o -\infty)$, es más infinito (o menos infinito) respectivamente.

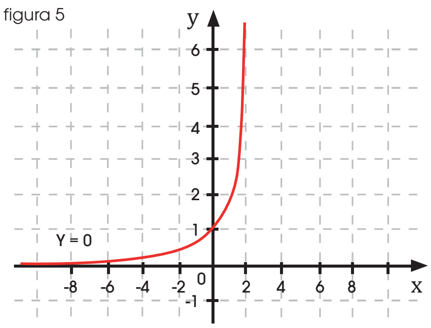
figura 4



Para valores muy elevados de x (tanto negativos como positivos), las imágenes de la función tienden a acercarse a $y=2$:

$$f(-10^3) = 1{,}993$$
$$f(-10^6) = 1{,}999\,993$$
$$f(10^3) = 2{,}007$$
$$f(10^6) = 2{,}000\,007$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

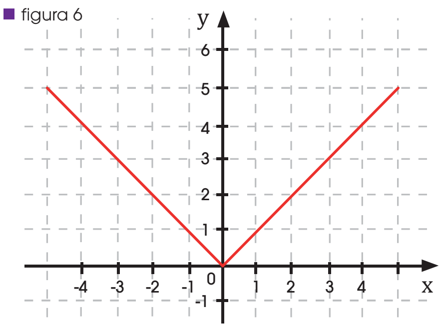
figura 5



Para valores muy elevados y negativos de x, las imágenes de la función tienden a $y = 0$. En cambio, para valores de x muy elevados, el valor de la función crece indefinidamente:

$$f(-10) = 4{,}54 \cdot 10^{-5}$$
$$f(-10^2) = 3{,}73 \cdot 10^{-44}$$
$$f(10) = 22026{,}5$$
$$f(10^2) = 1{,}99 \cdot 10^{45}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

figura 6



Para valores muy elevados de x (tanto negativos como positivos), las imágenes se hacen cada vez mayores:

$$f(-10^3) = 10^3$$
$$f(-10^6) = 10^6$$
$$f(10^3) = 10^3$$
$$f(10^6) = 10^6$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Existen funciones, como por ejemplo las funciones periódicas, las trigonométricas o las oscilantes, en las que el límite en el infinito no es ni un valor concreto L, ni crecen indefinidamente, ni decrecen indefinidamente. En este tipo de funciones, decimos que el límite en el infinito no existe.

Y TAMBIÉN: ¿?

En general, para calcular el límite de una función en un punto, se sustituye el punto en la función. Del mismo modo, para calcular el límite de una función en el infinito, podemos hallar el valor para números muy grandes de la variable e intuir su comportamiento, o bien podemos sustituir el infinito en la función y evaluar el resultado obtenido. Para ello, deberás tener en cuenta que:

1. $k + \infty = +\infty \qquad k - \infty = -\infty$
2. $+\infty + \infty = +\infty \qquad -\infty - \infty = +\infty$
3. $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty \qquad k \cdot \pm\infty = \pm\infty$
4. $k \cdot \pm\infty = \pm\infty \quad \text{si } k \neq 0$
5. $\dfrac{k}{\pm\infty} = 0 \qquad \dfrac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$
6. $k^{\pm\infty} = \pm\infty \quad \text{si } k > 1$

   $k^{\pm\infty} = \dfrac{1}{k^{\pm\infty}} = 0 \text{ si } k < 0$

4. CÁLCULO DE LÍMITES

Veamos ahora los límites de las funciones más sencillas para, a continuación, extender su cálculo a funciones más complejas.

Función constante $f(x) = k$

Límite en un punto $x_0: \lim_{x \to x0} f(x) = k$

Límite en el infinito: $\lim_{x \to \infty} f(x) = k;$

Función polinómica $f(x) = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} ... + a_1 x + a_0$

Límite en un punto $x_0: \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Límite en el infinito:

- Si $a_n > 0$ y n es par, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- Si $a_n > 0$ y n es impar, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- Si $a_n < 0$ y n es par, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- Si $a_n < 0$ y n es impar, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Función: $f(x) = \dfrac{k}{P(x)}$ **donde** $k(x) = \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to X_0} f(x_0) = \frac{k}{P(x_0)} \text{ si } P(x_0) \neq 0; \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{k}{\pm\infty} = 0$$

Ejemplo 3

Calculemos los siguientes límites si $P(x) = -x^2 + 5x + 3$ y $Q(x) = x - 4x^3$.

a. $\lim_{x \to +\infty} P(x)$

b. $\lim_{x \to -\infty} Q(x)$

Comprensión: Calculemos los límites de los polinomios en los puntos indicados y aplicaremos las reglas de operaciones con límites.

Resolución:

a. $\lim_{x \to +\infty} P(x) = P(+\infty) = -(+\infty)^2 + 5(+\infty) + 3 = -\infty$

se considera a un conjunto infinito elevado a una potencia n, mayor a un infinito elevado a una potencia $n - 1$, siendo $n > 0$.

b. $\lim_{x \to -\infty} Q(x) = Q(-\infty) = (-\infty) - 4(-\infty)^3 = +\infty$

Aplicamos también las regla de signos para multiplicaciones y potencias.

5. INDETERMINACIONES

En muchos casos, al efectuar operaciones con límites, obtenemos expresiones cuyo resultado dependerá de las funciones que intervengan en la operación.

Los tipos de indeterminación que pueden aparecer son:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}.$$

Veamos a continuación algunos métodos para resolver las dos primeras.

Para resolver este tipo de indeterminaciones, intentaremos factorizar numerador y denominador y simplificar la expresión obtenida.

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ y calculemos $\lim_{x \to 2} f(x)$:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(2)}{Q(2)} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}.$$

Si factorizamos el numerador y el denominador y simplificamos, obtendremos el límite de esta función:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4.$$

Ejemplo 4

Calcular: $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + 2x^2 - 3x}$.

$\frac{0}{0}$ **Comprensión**: Calculemos el valor del límite. Si obtenemos una indeterminación del tipo, factorizaremos el numerador y el denominador y simplificaremos para resolver la indeterminación.

Resolución: Calculemos el valor del límite en $x = 1$, sustituyendo este valor en el numerador y el denominador.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{\lim_{x \to 1} P(x)}{\lim_{x \to 1} Q(x)} = \frac{1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2}{1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1} = \frac{1 + 2 - 1 - 2}{1 + 2 - 3} = \frac{3 - 3}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

Para levantar la indeterminación, debemos factorizar los polinomios y luego simplificar la expresión:

Factorizamos, aplicando factor común por agrupación $\{ x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2 (x + 2) - (x + 2) = (x^2 - 1)(x + 2) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Factorizamos, aplicando factor común y trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ $\{ x^3 + 2x^2 - 3x = x (x^2 + 2x - 3) = x (x - 1)(x + 3)$

Luego:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x - 1)} (x + 2)(x + 1)}{x\cancel{(x - 1)} (x + 3)} \overset{x \neq 1}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x + 2)(x + 1)}{x (x + 3)} = \frac{(1 + 2)(1 + 1)}{1 \cdot (1 + 3)} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Comprobación: Si sustituimos el valor de x por valores cercanos a 1 por la derecha o la izquierda, el valor de la función se acerca a $\frac{3}{2} = 1{,}5$.

Actividades

2. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{2x - 8}$, $h(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$, $j(x) = \frac{(2 + x)^2 - 4}{x}$.

Halla los siguientes límites:

a. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{h(x)}{f(x)} \right)$

b. $\lim_{x \to 4} (f(x) - g(x))$

c. $\lim_{x \to 2} (f(x) - g(x))$

d. $\lim_{x \to -2} (f(x) - j(x))$

5.1. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Este tipo de indeterminación aparece al calcular el límite infinito de algunas funciones racionales. Para solucionar esta indeterminación, dividiremos numerador y denominador por la indeterminada de mayor exponente que aparece en el cociente, teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{P(x)}=\frac{\lim_{x\to+\infty}k}{\lim_{x\to+\infty}P(x)}=\frac{k}{\pm\infty}=0,$$ donde $k\in\mathbb{R}$ y $f(x)=\frac{x^3-4x+15}{x^2-x-50}$

Y TAMBIÉN: ¿?

Al resolver una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ según el grado de numerador $(P(x))$ y del denominador $(Q(x))$, podemos obtener tres casos:

—Si grado $P(x)>$ grado $Q(x)$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

—Si grado $P(x)<$ grado $Q(x)$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

—Si grado $P(x)=$ grado $Q(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a_n}{b_n}$

Consideremos, por ejemplo, la función y calculemos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x+15}{x^2-x-50}=\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim_{x\to+\infty}P(x)}{\lim_{x\to+\infty}Q(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Al dividir numerador y denominador por la indeterminada de mayor exponente que aparece en el cociente (x^2), obtenemos: Teniendo en cuenta los límites de cada término, obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x+15}{x^2-x-50}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{15}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}\ \frac{x}{x^2}\ \frac{50}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x}+\frac{15}{x^2}}{1-\frac{1}{x}\ \frac{50}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x}+\frac{15}{x^2}}{1-\frac{1}{x}\ \frac{50}{x^2}}=\frac{+\infty-0+0}{1-0-0}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

Ejemplo 5

Calculemos:

a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x+2}{x^4+3x}$

Comprensión: Al ser un límite infinito de funciones racionales, obtendremos la indeterminación ∞/∞. Para resolverla, dividiremos numerador y denominador por la indeterminada de mayor exponente del denominador.

Resolución: Dividimos el numerador y el denominador entre x 4, que es la indeterminada de mayor exponente del denominador, teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x+2}{x^6+3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^6}-\frac{4x}{x^6}+\frac{15}{x^6}}{\frac{x^6}{x^6}+\frac{3x^2}{x^6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^5}+\frac{2}{x^6}}{1+\frac{3}{x^4}}=\frac{0-0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0.$$

Comprobación : El valor de la función es para valores grandes de x observamos que la función crece indefinidamente

$\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x}=0.$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{x}=0.$ y que $\frac{k}{x}=0.$

6. CONTINUIDAD DE FUNCIONES

La continuidad de una función depende de la existencia de límites en los puntos de su dominio.

Una función f es continua en un punto a ∈ D (f) si f (a) existe y los límites laterales son finitos e iguales a f (a). $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Si $f(x)$ no cumple alguna de estas premisas, se dice que $f(x)$ es discontinua en x = a o que tiene una discontinuidad en $x = a$.

Estudiar la continuidad de una función es conocer todos los puntos del dominio en los que es continua.

De las propiedades de las operaciones con límites, se demuestra que si $f(x)$ y g (x) son funciones continúas en $x = a$:

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ es continua en $x = a$.

   Como f y g son continuas en x = a, $f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $g(a) = \lim_{x \to a} g(x) = L_2$.

   Por lo tanto: $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L1 + L2 = f(a) \pm g(a)$.

2. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = a$.

La aplicación de estas dos propiedades permite determinar la continuidad de cualquier polinomio.

3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x)$ es continua en $x = a$ si $g(a) \neq 0$.

4. $(f^g)(x) = [f(x)]^{g(x)}$ es continua en x = a si $f(a) \geq 0$.

Y TAMBIÉN: ¿?

Para que una función sea continua en un punto x = a, deben existir los límites laterales de la función alrededor de este punto y ser iguales. Es decir, debe existir el límite de la función en este punto.

Ejemplo 6

Determinar en qué puntos, las siguientes funciones son continuas:

a. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

b. $g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Comprensión: Determinaremos en qué puntos del dominio cumple cada función la definición de continuidad.

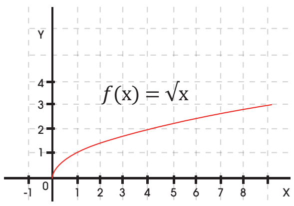
Resolución: Puesto que el exponente es un radical, el dominio de la función es $[0, +\infty)$.

De las reglas de cálculo con límites, se sigue que para cualquier $a > 0$, $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
Por lo tanto, por la propiedad 4, si $\sqrt{x}$ es continua en $(0, +\infty)$, $f(x)$ también es continua.

La función es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, pues la función $g(x) = x$ lo es. Así, debemos estudiar la continuidad en el punto $x = 0$. En este punto, la función está definida $g(0) = 1$. Si ahora calculamos los límites laterales:
$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = 0 \neq g(x)$ Por lo tanto, la función está definida en $x = 0$, los límites laterales existen y son finitos, pero no coinciden con $g(0)$. Concluimos, entonces, que g (x) es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y discontinua en $x = 0$.

Y TAMBIÉN ¿?

En los valores de x para los que una función no está definida en uno de sus lados, decimos que la función es de segunda especie o esencial.



$\sqrt{x}$ tiene una discontinuidad de segunda especie en $x=0$ porque la función no está definida en uno de los laterales de este punto.

6.1. Tipos de discontinuidad

Las discontinuidades se estudian a partir de la definición de continuidad en un punto y se clasifican según la parte de la definición que cumplen.

Discontinuidad evitable

Es aquella en la que $f(x_0)$ no existe, pero los límites laterales de la función en x_0 existen, son finitos y coinciden.

Discontinuidad primera especie o no evitable

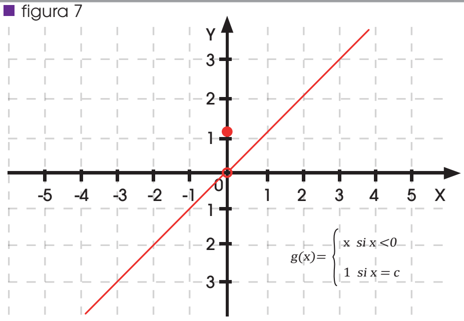
Las discontinuidades no evitables aparecen cuando los límites laterales no existen o alguno de ellos es infinito.

—Si los límites laterales existen, son finitos, pero distintos discontinuidad salto finito.

—Si los límites existen y uno de ellos es infinito discontinuidad de salto infinito.

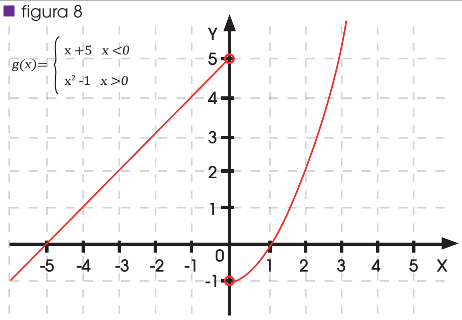
—Si los límites laterales son infinitos, decimos que la discontinuidad es asintótica.

figura 7



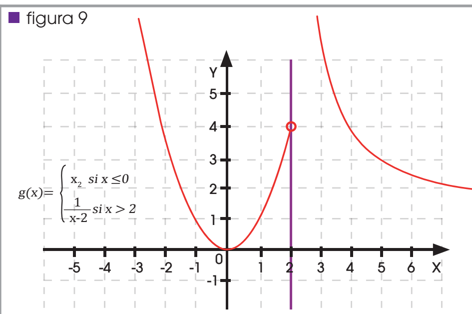
Discontinuidad evitable en $x_0 = 0$

figura 8



Discontinuidad de salto finito

figura 9



Discontinuidad de salto infinito

Ejemplo 7

Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x+2}$

b. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \text{ si } x \leq 0 \\ x + 2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Comprensión: En la primera función, al ser racional, estudiaremos los puntos donde se anula el denominador y, en la segunda, el tramo donde cambia la función.

Resolución:

a. $f(-2)$ no existe, pero al calcular el límite:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} \overset{x \neq -2}{\downarrow} = -4$$

En $x = -2$ tenemos una discontinuidad evitable.

b. $f(0) = -3$. Si ahora calculamos los límites laterales:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0}(2x - 3) =$

-3 y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0}(x + 2) = 2$

Es una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

Problemas resueltos

A

Una población crece según la siguiente función: $f(t) = \dfrac{5000t + 1000}{2t+1}$, donde t es el número de años transcurridos.

a. **Calcular** la población actual.

b. ¿Crecerá indefinidamente la población?

Solución

- **Comprender:** Deberemos estudiar la función en t = 0 y en el infinito.
- **Planificar:**

a. La población actual será para $t = 0$: $f(0)$ = $\dfrac{5000.0 + 1000}{2.0 + 1} = 1000$ habitantes

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5000x + 1000}{2x + 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$

- El resultado es una indeterminación. Como el numerador y el denominador son polinomios del mismo grado, la solución es el cociente entre los términos que acompañan al término de mayor grado:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5000x + 1000}{2x+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5000x}{x} + \frac{1000}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{5000}{2} = 2500$$

La población no pasará de los 2 500 habitantes.

B

Halla el valor de a para que la siguiente función sea discontinua en $x_0 = 3$ **y clasifica todas sus discontinuidades**

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - a}$$

Solución

Comprender: Para que una función racional sea discontinua, debemos hallar los puntos que anulen el denominador.

Planificar:

a. Si f es discontinua en $x_0 = 3 : 3^2 - 3 - a = 0 \Rightarrow a = 6$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$$

Por lo tanto:
Para hallar el resto de discontinuidades, buscaremos las soluciones de $x^2 - x - 6 = 0$ $x_1 = -2, x_2 = 3$.
Analicemos $x_1 = -2$:

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{0}{0}$$

El resultado es una indeterminación, así que intentaremos factorizar y simplificar.

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x - 1)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x - 3)} = \frac{3}{5}$$

f (-2) no existe, pero sí existe el límite. En x = -2, la función presenta una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x\to3} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \overset{x \neq -2}{=} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x - 1)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x - 3)} = \frac{-3 -1}{-3 -3} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

f (3) no existe y los límites laterales son infinitos. En x = 3, la función presenta una discontinuidad asintótica o de salto finito.

7. COCIENTE INCREMENTAL O TASA DE VARIACIÓN

Observa la gráfica de la función f que nos da la cantidad de agua de lluvia recogida en un observatorio meteorológico a lo largo de un día.

Para hallar la cantidad de agua recogida hasta un instante t_0, basta con observar el valor de f correspondiente a t_0.

Asimismo, si queremos saber la cantidad de agua recogida entre dos instantes determinados, t_1 y t_2, basta con calcular $f(t_2) - f(t_1)$. Así:

Y TAMBIÉN: ¿?

A veces, la Tasa de Variación Media (TVM) de una función f se expresa: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

donde $\Delta f = f(b) - f(a)$ denota el incremento de $f(x)$, y $\Delta x = b - a$ denota el incremento de x.

También suele escribirse cuando nos interesa resaltar que la variable dependiente es $y = f(x)$.

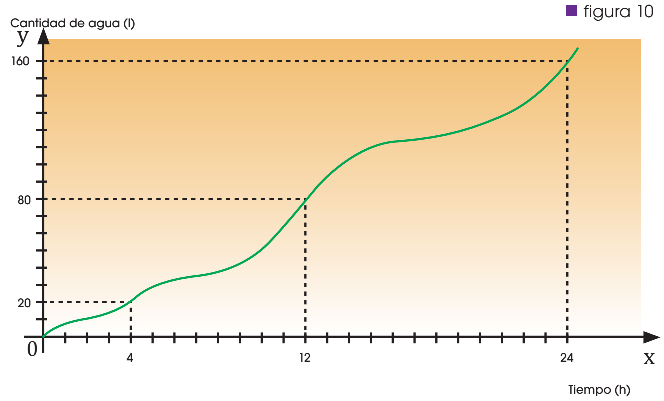


figura 10

Intervalo de tiempo	Cantidad de agua (l)
De 0 h a 4 h	$f(4) - f(0) = 20 - 0 = 20$
De 4 h a 12h	$f(12) - f(4) = 80 - 20 = 60$

Tabla 4

Si ahora queremos conocer en qué intervalo ha llovido con más intensidad, debemos averiguar la cantidad de agua caída por unidad de tiempo en cada intervalo. Para ello evaluamos los siguientes cocientes:

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{20 - 0}{4 - 0} = \frac{20}{4} = 5\ \text{l/h} \qquad \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{80 - 20}{12 - 4} = \frac{60}{8} = 7{,}5\ \text{l/h}.$$

Vemos, pues, que en el intervalo comprendido entre las 4 h y las 12 h ha llovido con mayor intensidad. Este tipo de cocientes se define también para una función cualquiera f. Hablamos entonces de tasa de variación media de la función en un intervalo limitado por dos valores de la variable x.

Si la función f está definida en un intervalo $[a, b]$, la tasa de variación media de f en $[a, b]$ es el cociente entre la variación de la función y la longitud del intervalo:

$$\text{TVM}_{[a,\,b]}\, f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ejemplo 8

Calculemos la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[1, 3]$.

Comprensión: Calculemos los valores que toma la función en los extremos del intervalo y utilizaremos la expresión de la tasa de variación media.

Resolución:

$f(1) = 1^2 - 1 = 0$; $f(3) = 3^2 - 1 = 8$.

$$\text{TVM}_{[1,\,3]}\, f(x) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{8 - 0}{2} = 4$$

8. TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

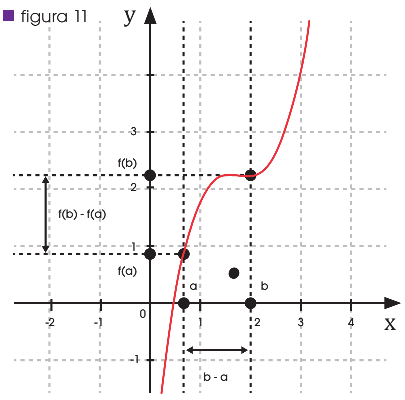
Calculemos ahora la TVM de la función $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[-1, 1]$:

$$\text{TVM } [-1, 1]\ f(x) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{0 - 0}{2} = 0$$

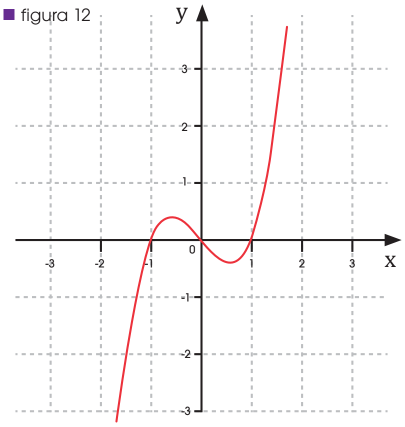
Si dibujas la gráfica de la función observarás, sin embargo, que esta presenta importantes variaciones en este intervalo.

La TVM no deja de ser un promedio y, por lo tanto, interesa que los intervalos escogidos sean lo más pequeños posibles para conocer de forma precisa cómo se comporta la función cerca de cualquier punto. El límite en que los extremos de los intervalos de la TVM son infinitamente próximos se conoce como tasa de variación instantánea.

■ figura 11



■ figura 12



> La tasa de variación instantánea de una función f en $x = a$ es el valor, en caso de que exista, al que tiende la tasa de variación media en los intervalos $[a, x]$ cuando $x \to a$. Es decir:

$$\text{TVI}_a f(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ejemplo 9

Si $f(x) = 2x - 5$ y $[a, b]$ es el intervalo $[2, 3]$, la tasa de variación media de f en dicho intervalo es:

$$\text{TVM } [2, 3] = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{1-(-1)}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Una forma equivalente de expresar la TVI de $f(x)$ en $x = a$ es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Esta expresión puede resultar muy útil para realizar cálculos.

Actividades

3. En un estudio llevado a cabo por el departamento de biología, han determinado que la población de un tipo de hormiga crece según la función $f(x) = 1 + 2e^x$, donde $f(x)$ indica el número de hormigas en miles y x el tiempo transcurrido en meses.

   Calcula:

   a. La tasa de variación media de una población de hormigas durante los dos primeros meses.

   b. La tasa de variación media de la población del tercer al sexto mes.

   c. La tasa de variación instantánea de la población en el sexto mes.

4. **Calcula** la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   a. $f(x) = 2x + 3$ en $x = 2$

   b. $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$

   c. $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 0$

   d. $f(x) = x^3 + 2x - 4$ en $x = 1$

9. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y FÍSICA DEL COCIENTE INCREMENTAL

Consideremos la función f cuya gráfica es la de la figura, y los puntos $P_1 = (a, f(a))$ y $P_2 = (b, f(b))$.

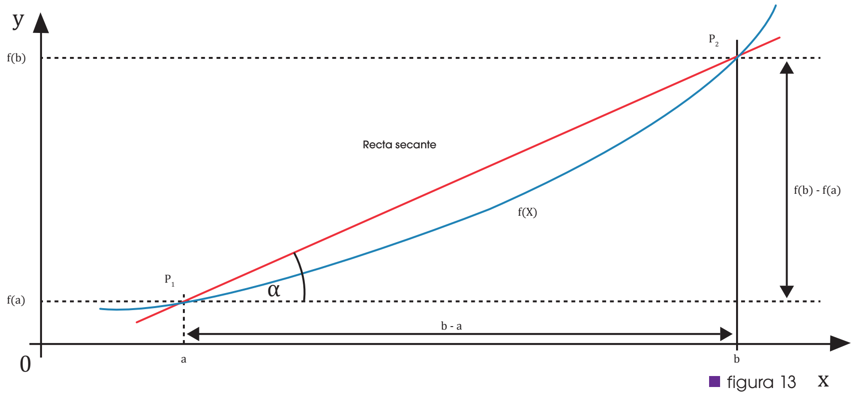


figura 13

La tasa de variación media de la función entre a y b es:

$$\text{TVM }[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Fíjate en que este cociente coincide con la tangente trigonométrica del ángulo α, que es, a su vez, la pendiente de la recta secante a la curva por los puntos P1 y P2. Por tanto, podemos afirmar:

La tasa de variación media de una función f en el intervalo $[a, b]$ coincide con la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Y TAMBIÉN: ¿?

Interpretación física de la tvm

Si consideramos la función que nos da la posición de un móvil dependiente del tiempo, la tasa de variación media en un intervalo nos proporcionará la velocidad media de dicho móvil en ese intervalo.

Ejemplo:

La posición en función del tiempo de un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea viene dada por: $f(t) = t^2 + 3t$, en unidades del SI.

Calcula la velocidad media, vm, entre $t = 1$ s y $t = 5$ s.

$$V_m = \text{TVM }[1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1}$$

$$= \frac{40 - 4}{5 - 1} = \frac{36}{4} = 9 \text{ m/s}$$

Ejemplo 10

Calculemos la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ en los puntos de abscisa $x=4$ y $x=7$.

Debemos calcular la tasa de variación media de f en el intervalo $[4, 7]$.

$$\text{TVM }[4, 7] = \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} = \frac{147 - 48}{4} = 33$$

La pendiente de la recta secante a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 4$ y $x = 7$ es 33, lo que significa que esta recta forma con el eje de abscisas un ángulo cuya tangente es 33.

Actividades

5. El número de alumnos de un centro escolar afectados por la gripe a lo largo de un mes viene dado por la función $f(x) = 800 - x^2$. La variable x indica los días del mes y $f(x)$, el número de alumnos afectados.

   Calcula la tasa de variación media correspondiente a los intervalos $[3, 5]$, $[13, 15]$ y $[10, 20]$.

   —¿En cuál de estos intervalos ha disminuido más rápidamente el número de alumnos enfermos?

6. **Calcula** la tasa de variación media de la función $f(x) = -2x + 5$, en los intervalos $[-5,-3]$, $[3, 5]$ y $[10, 20]$.

7. **Calcula** la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$ en los puntos de abscisa $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

8. La posición en función del tiempo de un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea viene dada por: $f(t) = 50 + 150\sqrt{t}$ siendo t la hora del día y $f(t)$, su distancia al origen. ¿Cuándo va más rápido el móvil, entre las 2 h y las 4 h o entre las 7 h y las 11 h?

10. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

El estudio de funciones experimento una revolución con su sistematización en entornos cada vez más pequeños. El concepto de derivada es parte fundamental de esta sistematización, y de la rama de las Matemáticas llamada Cálculo diferencial.

La derivada de una función f en x , se representa por $f'(x)$ y queda definida de la siguiente manera:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En este caso, f debe ser **continua** y **derivable** en x.

Ejemplo 11

Dada la función $f(x) = x^2 - 4x$, calculemos la derivada en el punto $x = -1$

Comprensión: Debemos calcular el límite de la definición, y luego tomar a $x = -1$.

Resolución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) - (x^2 - 4x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h - x^2 + 4x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x + h - 4)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h - 4 = 2x - 4$$

Reemplazamos el valor de $x = -1$ en $f'(x)$:

$$f'(-1) = 2(-1) - 4 = -2 - 4 = -6$$

Ejemplo 12

Estudiamos la continuidad y la derivabilidad de $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

Comprensión: Para estudiar la continuidad, escribiremos f como una función definida por partes

Resolución:

La función es dos límites continua en $x = 0$ porque los límites existen y valen 0.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = -1 \quad f'(0^+) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = +1$$

Por otra parte, Como los límites laterales no coinciden, no existe ni el límite ni la derivada en $x = 0$.

En $x = 0$, $f(x) = |x|$ es un ejemplo de función continua, pero no derivable

TIC

En este enlace, encontrarás una introducción al concepto de derivada de una función en un punto en la que se usa la llamada notación incremental.

http://goo.gl/qmcywq

Y TAMBIÉN:

Si una función f es una derivable en todos los puntos de un intervalo, decimos que es derivable en ese intervalo.

II. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Hemos visto que la tasa de variación media de una función f, en el intervalo $[a, b]$, es la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función por los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (b, f(b))$.

Al tomar valores b_1, b_2, b_3 cada vez más próximos a , las correspondientes rectas secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 se van aproximando a una recta t, a la que llamamos recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa a.

La pendiente de esta recta será el límite de las pendientes de las rectas secantes PQn, es decir, el límite de las TVM de f en los intervalos $[a, b_n]$. Pero este límite es lo que hemos definido como $f'(a)$.

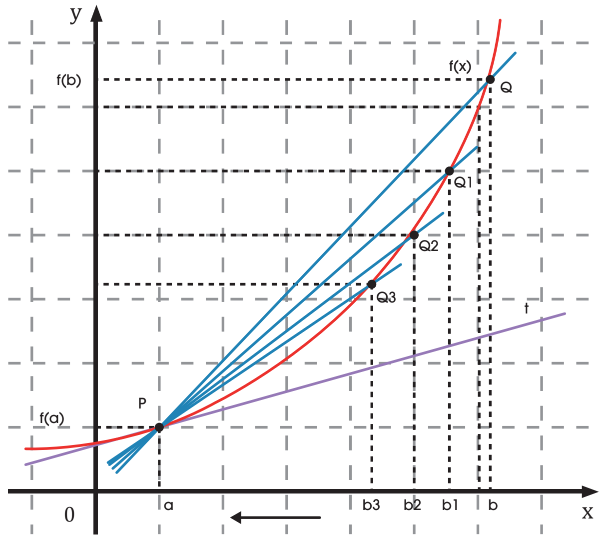


figura 14

Pendiente de la recta secante	PQ_n= TVM $[a, b_n]$
↓	↓
Pendiente de la recta tangente en	$P = f'(a)$.

Por tanto, podemos afirmar que:

La derivada de la función f en el punto de abscisa $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a, f(a))$.

Ecuación de la recta tangente

Recuerda que la ecuación punto-pendiente de una recta es:

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ donde (x_0, y_0) es un punto de la recta y m, su pendiente. Puesto que $f'(a)$ nos da la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$, se tiene:

La ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ es:
$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

Ejemplo 13

Hallemos la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ en $x = 1$.

Comprensión: Para determinar la ecuación de la recta, necesitamos calcular $f(1)$ y $f'(1)$, en caso de que exista.

Resolución: $f(1) = 3 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 + 2 = 1$

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{3x^3 - 4x + 2 - (3 - 4 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{3(x^3 - 1) - 4(x - 1)}{x - 1}$$

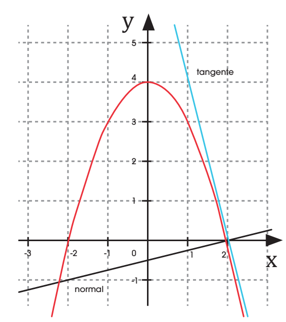
$$= \lim_{x \to -1} 3 \ (x^2 + x + 1) - 4 = 9 - 4 = 5$$

La ecuación de la recta es, por lo tanto: $y - 1 = 5 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 5x - 4$.

Y TAMBIÉN:

La recta normal a la gráfica de una función en un punto es la perpendi-cular a la tangente. Por tanto, su ecuación es:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$



En el punto a, la pendiente de la recta tangente por la izquierda y la derecha son distintas. Por lo tanto, la función no es deribable en este punto.

TIC

En este enlace, puedes visualizar l aplicación idea gráfica de derivada e una función en un punto.

http://goo.gl/dn3VW6

12. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA

Si la función que consideramos es la que nos da la posición de un móvil dependiente del tiempo, la tasa de variación instantánea o derivada en un instante t nos proporcionará la velocidad instantánea de dicho móvil en ese instante.

La velocidad media es el cociente entre el espacio recorrido (Δe) y el tiempo transcurrido (Δt).

$$Vm\ (t) = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

figura 15

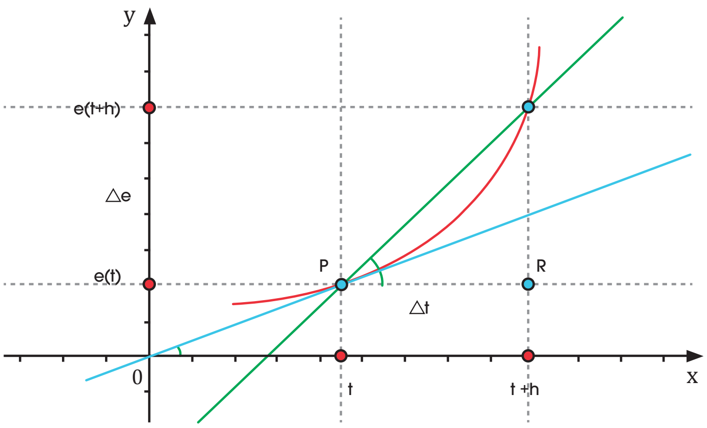
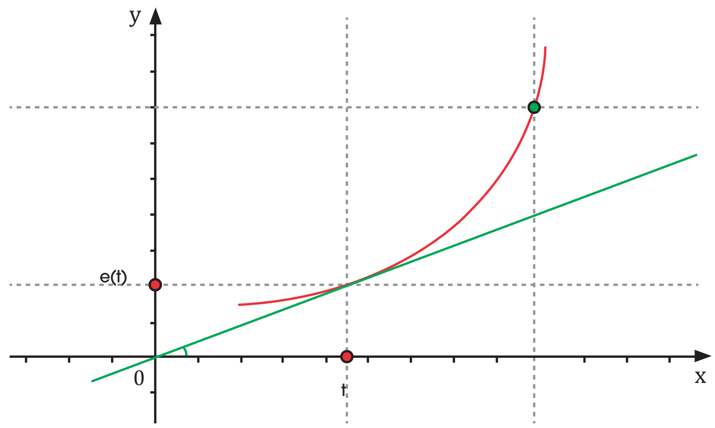


figura 16



Velocidad instantánea

$$V\ (t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Ejemplo 14

La relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es $e\ (t) = 6t^2$. **Calcular**:

a. La velocidad media entre $t = 1$ y $t = 4$.

b. La velocidad instantánea en $t = 1$.

a. **Comprensión**: La velocidad media es el cociente incremental en el intervalo $[1, 4]$.

Resolución:

$$V_m = \frac{e(4) - e(1)}{4 - 1} = \frac{6.4^2 - 6.1^2}{3} = \frac{96 - 6}{3} = 30 \text{ m/s}.$$

b. **Comprensión**: La velocidad instantánea es la derivada en $t = 1$.

Resolución:

$$V(t) = e'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{6(t + h)^2 - 6t^2 - 6t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6(t^2 + 2ht + h^2) - 6t^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(6t^2 + 12ht + 6h^2) - 6t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12ht + 6h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(12t + 6h)}{h} = \lim_{h \to 0} (12t + 6h) = 12\ t$$

Entonces $e'(t) = 12\ t$; ahora evaluemos $t = 1$ en $e'(t)$:

$e'(1) = 12(1) = 12$ m/s.

13. FUNCIÓN DERIVADA

Ejemplo 15

Calculemos la función derivada de $f(x) = x^2$. Según la definición de función derivada, tendremos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x.$$

Observa que el cálculo de la función derivada de una función f simplifica el proceso de cálculo del valor de la derivada de f en diferentes puntos.

Así, para calcular $f'(0)$, $f'(-1)$ y $f'(2)$, siendo f'la función del ejemplo anterior, bastará sustituir x por los valores 0, -1 y 2 en la función derivada f'.

x	$f'(x)=2x$
$x = 0$	$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$
$x = -1$	$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$
$x = 2$	$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

Tabla 5

Usando la definición anterior, los matemáticos han demostrado la validez de las siguientes técnicas de derivación de funciones elementales, que se pueden apreciar en la tabla 6.

Función	Función derivada
$f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(-1) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \text{sen}\, x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{sen}\, x$

Tabla 6

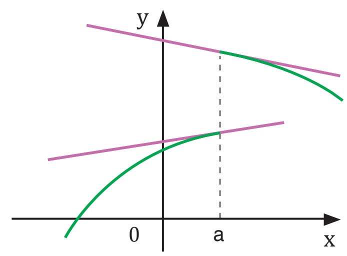
Y TAMBIÉN: ¿?

Derivabilidad y continuidad

Observa que para poder calcular la derivada de una función f en un punto a es preciso que exista $f(a)$, pues de lo contrario no podemos calcular:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pero, además, la función ha de ser continua en a. Si no es así, las rectas secantes no se aproximan a una recta común y, por tanto, no existe recta tangente en a, ni $f(a)$, que es su pendiente.

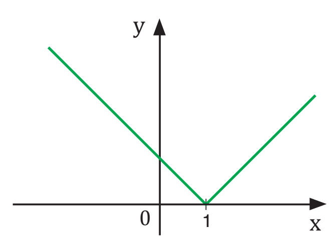


Podemos establecer entonces que para que una función f sea derivable en a es necesario que f sea continua en a.

Pero la continuidad en a no es suficiente para que f sea derivable.

Puede ocurrir que f sea continua en a pero no derivable.

Así, la función representada en la figura es continua en $x = 1$, pero no existe $f'(1)$, pues las rectas secantes por la derecha y por la izquierda no se aproximan a una recta común.



La tabla 1 del margen recoge la derivada de las principales funciones.

Función derivada y operaciones

Como sabes, dadas dos funciones, f y g, estas se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir y componer.

Aplicando nuevamente la definición de derivada y las propiedades de los límites, se obtienen las reglas que permiten derivar funciones conseguidas al operar con otras funciones, como puedes observar en la tabla siguiente.

Derivada de la función suma	**Derivada del producto de una constante por una función**
$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$	$f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$
Derivada de la función producto	**Derivada de la función cociente**
$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$	$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
Derivada de la función compuesta: regla de la cadena	
$f(x) = (g \circ h)(x) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$	

Combinando estas reglas con las derivadas de las funciones que aparecen en la tabla 1, podemos derivar multitud de funciones.

Ejemplo 16

Calculamos la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^7$

b. $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

c. $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$

d. $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Todas estas funciones se pueden expresar en forma de potencia, luego aplicaremos la regla de derivación de $f(x) = x^n$

a. $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$

b. $g(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow g'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

c. $h(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow h'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \dfrac{3}{x^4}$

d. $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow i'(x) = -\dfrac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}-1} = -\dfrac{1}{2} x^{\frac{-3}{2}}$

$= \dfrac{2}{2\sqrt{x^3}} = -\dfrac{2}{2x\sqrt{x}}$

Ejemplo 17

Hallamos la derivada de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.
La función f es una suma de tres funciones:

$f_1(x) = x^3;\ f_2(x) = -2x^2;\ f_3(x) = 1$

Luego f' será la suma de las derivadas de estas tres funciones:

$f' = f_1' + f_2' + f_3'$

Además, f_2 es el producto de una constante (-2) por una función (x 2). Por tanto:

$f_1(x) = x^3 \Rightarrow f_1'(x) = 3x^2$

$f_2(x) = -2x^2 \Rightarrow f_2'(x) = -2 \cdot 2x = -4x$

$f_3(x) = 1 \Rightarrow f_3'(x) = 0$

Luego:

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

Razonando de manera análoga a la del ejemplo 3, podemos calcular de forma inmediata la derivada de cualquier función polinómica:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow f(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1$$

Veamos ahora cómo derivar un producto y un cociente de funciones.

Ejemplo 18

Hallemos la derivada de la función $f(x) = x^3 \cdot \cos x$. La función f es un producto de dos funciones:

$g(x) = x^3 \quad y \quad h(x) = \cos x$

Debemos aplicar, pues, la regla de derivación de un producto de funciones:

$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Se tiene: $g'(x) = 3x^2$; $h'(x) = -\text{sen } x \Rightarrow$

Luego:

$f'(x) = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\text{sen } x) = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \text{ sen } x$

Finalmente, veamos cómo se aplica la regla de la cadena para derivar una composición de funciones.

Ejemplo 19

Hallar la derivada de la función $f(x) = \text{sen}2x$.

La función f es la composición de dos funciones:

$g(x) = 2x \quad y \quad h(x) = \text{sen } x$

cuyas derivadas son las siguientes:

$g'(x) = 2 \quad ; \quad h'(x) = \cos x$

Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$f(x) = g(h \circ g)(x) = h(g(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$

Ejemplo 20

Hallemos la derivada de la función $f(x) = \cos^2 x$.
La expresión cos 2_x equivale $(\cos x)^2$, por lo que la función f es la composición de dos funciones:

$g(x) = \cos x \quad y \quad h(x) = x^2$

cuyas derivadas son las siguientes:

$g'(x) = \text{sen } x \quad ; \quad h'(x) = 2x$

Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2\cos x \, (-\text{sen } x)$

$= -2 \text{ sen } x \cos x$

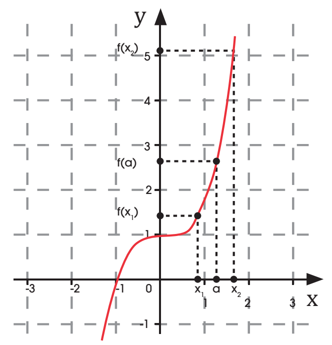
Actividades

9. **Calcula** la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 2x^9$
b. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$
c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$
d. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 10$
e. $f(x) = \cos x \,.\, e^x$
f. $f(x) = 4x^3 . \ln x$

14. APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS

El principal interés de la derivada, y la razón por la que es utilizada en numerosos contextos científicos y tecnológicos, es la correspondencia entre su signo y el crecimiento o decrecimiento de la función original.



Función creciente figura 17

Monotonía de una función

El uso de derivadas puede ayudarnos a determinar el crecimiento o decrecimiento de una función a partir del signo de la derivada. Recuerda la definición de derivada de una función f en un punto $x = a$.

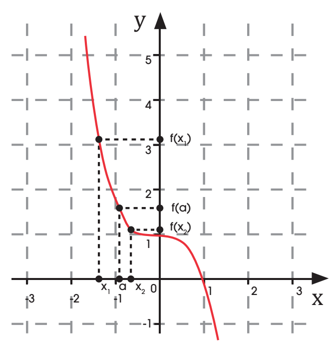
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Supongamos que $f'(a) > 0$. Por la definición de límite, para valores de x suficientemente próximos a a, se cumple que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, lo que significa que:

$$\begin{cases} x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \\ x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \end{cases} \quad \text{O equivalentemente:} \quad \begin{cases} x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \end{cases}$$

Entonces, podemos afirmar que existe un entorno de a en el que la función es creciente. Decimos que f es creciente en $x = a$.

Análogamente, si $f'(a) < 0$ obtenemos que la función es decreciente en $x = a$.



Función decreciente figura 18

> Si $f'(a) > 0$, f es creciente en un intervalo I, con a ∈ I y si $f'(a) < 0$, f es decreciente, en un intervalo dado.

Ejemplo 21

Indicar los intervalos de monotonía de la siguiente función: $f(x) = \frac{3x^2}{x - 1}$

Comprensión: Para conocer la monotonía de las funciones en dichos puntos, debemos asegurar que los puntos pertenecen al dominio de la función y de la función derivada.

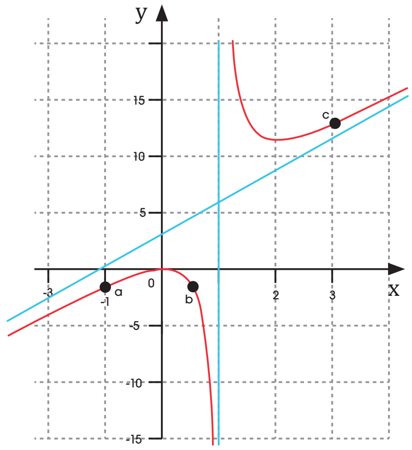
Resolución: si la función $f(x) = \frac{3x^2}{x - 1}$

El punto que anula el denominador en ambos casos es $x = 1$.
Luego podemos asegurar que los puntos que hay que estudiar pertenecen al dominio $D(f) = D(f') = \mathbb{R} - \{1\}$.
Ahora podemos calcular la derivada para estos valores:

$f'(-1) = 2{,}25 > 0$
$f(0{,}5) = -9 < 0$
$f(3) = 2{,}25 > 0$

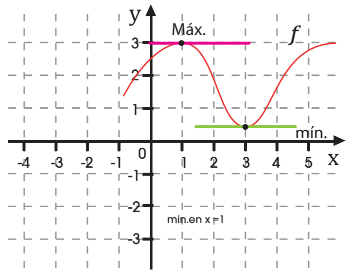
$$f'(x) = \frac{6x(x-1) - 3x^2}{(x-1)^2} = \frac{3x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Si $x \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[\;\Rightarrow\; f$ es creciente
Si $x \in [0, 1[\cup]1, 2[\;\Rightarrow\; f$ es decreciente



Y TAMBIÉN: ¿?

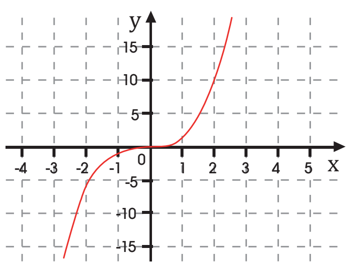
Si una función derivable tiene un extremo relativo en el punto x = a, entonces $f'(a) = 0$.



■ figura 19.

Y TAMBIÉN ¿?

Si bien la derivada se anula en los extremos de una función, el recíproco no es cierto. Dada una función derivable, la derivada puede anularse en puntos en los que la función no es un extremo. Por ejemplo, para x = 0, la derivada de $f(x) = x3$ es nula:



■ figura 20.

Extremos de una función

La función representada en la figura 19 tiene dos extremos relativos: un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 3$.

En estos puntos la función no es ni creciente ni decreciente.

Entonces en ellos la derivada es cero, ya que no puede ser ni positiva ni negativa.

Así, podemos afirmar que:

Si una función derivable tiene un extremo relativo en el punto x = a, entonces $f'(a) = 0$.

Un método para determinar si el extremo relativo es máximo o mínimo consiste en determinar el comportamiento de la función a ambos lados del punto.

Si $f(a)$ es un máximo relativo, la derivada pasará a ser positiva para valores de x situados a la izquierda de $x = a$, y a ser negativa para valores de x situados a la derecha del punto $x = a$.

Si, por el contrario, $f(a)$ es un mínimo relativo, la derivada pasará de ser negativa a positiva para puntos situados a la izquierda y a la derecha respectivamente de $x = a$.

Así, el comportamiento que presentaría la derivada de una función f derivable con un máximo relativo en $x = a$ y un mínimo relativo en $x = b$ sería:

	$x < a$	a	$x > a$	$x < b$	b	$x > b$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	máximo	↘	↘	máximo	↗

■ Tabla 5

Ejemplo 22

Hallar los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$.

Comprensión: Hallaremos los valores para los que se anula la derivada y estudiaremos su signo entorno a ellos.

Resolución: $f(x) = 3x^2 - 8x + 4$. Los puntos en que la derivada vale 0 son:

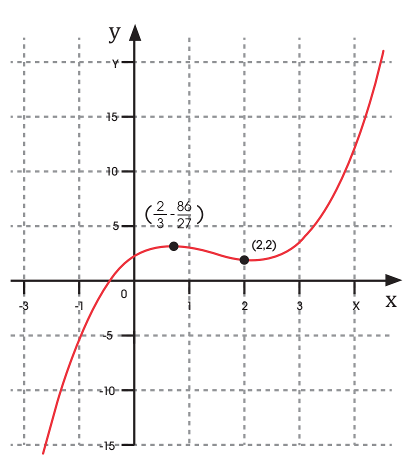
$$3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Escogemos valores cercanos y a ambos lados de los puntos en que se anula la derivada para saber si son máximos o mínimos:

$f'(0) = 4$ $\quad f'(1) = -1$ $\quad f'(1{,}5) = -1$ $\quad f'(3) = 7$

	x=0	x=2/3	x=1	x=1,5	x=2	x=3
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	máximo	↘	↘	máximo	↗

La función tiene un máximo en el punto $x = 2/3$ y un mínimo relativo en $x = 2$.



15. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Ya tenemos las herramientas para buscar los máximos y mínimos de una función a partir de su derivada. De esta forma, estamos en disposición de solucionar una de las clases de problemas que más aplicaciones tienen en contextos reales: los problemas de optimización.

Optimizar consiste en buscar los máximos o mínimos de una función que define un fenómeno. Por ejemplo, en un proceso de producción industrial es necesario minimizar gastos, mientras que en cualquier comercio conviene hacer los ajustes necesarios para maximizar los beneficios.

Para resolver un problema de optimización, es aconsejable seguir estos pasos:

1. Relacionar las diferentes variables y plantear la función que tenemos que optimizar.
2. Derivar la función y encontrar los valores en los que la derivada se anula.
3. Determinar si estos valores son máximos o mínimos y calcular su imagen.
4. Comprobar si los resultados obtenidos son compatibles con el enunciado del problema.

Ejemplo 23

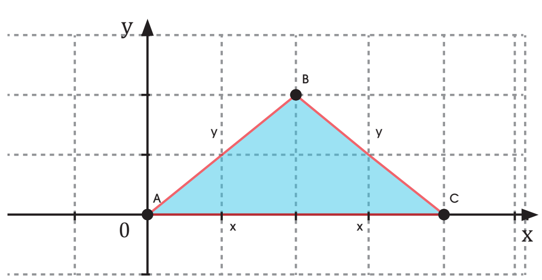
Queremos construir un triángulo isósceles con un perímetro de 18 cm. Calculemos las dimensiones que deberá tener este triángulo para que el área sea máxima.

Comprensión: Para resolver el problema, primero deberemos expresar el área del triángulo como una función que dependa únicamente de una variable. Una vez conseguida la expresión, buscaremos para qué valores el área es máxima.

Datos: $P = 18$ cm; longitud de los lados iguales: x; altura: h

Resolución:

Un dibujo nos ayudará en la comprensión del problema.



1. La función que representa el área del triángulo es:

$$A = \frac{2x \cdot h}{2} = x \cdot h$$

A partir de la expresión del perímetro y el teorema de Pitágoras, indicaremos la altura en función de la variable x:

$$P(x) = 2x + 2y = 18\;;\; y = 9 - x$$

$$h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(9-x)^2 - x^2} = \sqrt{81 - 18x} = 3 \cdot \sqrt{9 - 2x}$$

Sustituyamos en la fórmula del área, obtenemos la función que deberemos derivar:

$$A(x) = x \cdot h = x \cdot 3\sqrt{9-2x} = 3 \cdot \sqrt{9x^2 - 2x^3}$$

2. La expresión del área es la composición de las funciones $g(x) = 3\sqrt{x}$ y $h(x) = 9x^2 - 2x^3$ y su derivada será:

$$A'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{3}{2x \cdot \sqrt{9-2x}} \cdot (18x - 6x^2) =$$

$$= \frac{18x \cdot (3-x)}{2x \cdot \sqrt{9-2x}} = \frac{9 \cdot (3-x)}{\sqrt{9-2x}}$$

Vemos que la derivada se anula en $x = 3$.

3. Para determinar si el valor es máximo o mínimo, escogemos un valor de x mayor que 3 y otro menor del dominio de definición de f. Por ejemplo, $x = 0, x = 4$: $A'(0) = 9 > 0$

$A'(4) = -9 < 0$

Luego, $x = 3$ es un máximo y el triángulo deberá tener base de $2 \cdot 3 = 6$ cm y lados iguales de $y = 9 - 3 = 6$ cm.

4. El resultado del problema indica que el triángulo isósceles de área máxima es, de hecho, un triángulo equilátero de lado 6 cm.

Problemas resueltos

A

Estudia y representa la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

Solución

Comprender:

Para estudiar y representar la función, analizaremos aspectos como el dominio, el recorrido, la simetría, los cortes con los ejes, los extremos y la monotonía y las asíntotas.

Planificar:

Intenta resolver el problema individualmente. Para ello, tapa la respuesta y sigue estos pasos:

Ejecutar el plan

1. Dominio y recorrido: la función es una fracción algebraica y, por lo tanto, para estudiar el dominio debemos analizar para qué valores de x se anula el denominador.
2. Simetría: para determinar la simetría, comparamos la función original con la función $f(-x)$.
3. Cortes con ejes: determinEmos los puntos de corte con el eje de ordenadas evaluando la función en $x = 0$ y las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.
4. Extremos y monotonía: para conocer los extremos, busquemos los puntos en que la derivada es 0 y evaluemos el signo de los puntos a la derecha e izquierda de estos.
5. Asíntotas: para determinar las asíntotas, debemos estudiar cómo se comporta la función en el infinito (a. horizontal), alrededor de los valores de x que no están en el dominio (a. vertical) y si existe una recta

   $y = mx + n$ tal que:

   $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad n = \lim\,[f(x) - mx] \text{ (a. oblicua)}$$

6. Representación gráfica: con los datos conseguidos y algunos puntos de la función, obtenemos la representación gráfica.

Respuesta

Revisar el denominador a 0: $x^2 - 1 = 0 \rightarrow k = \pm 1$

Luego el dominio es: $Df(x) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$.

En este caso, la función puede tener como imagen cualquier número real. Entonces, el recorrido es $R(f) = \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

Al ser $f(-x) = -f(x)$, la función es impar. Luego es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Corte con el eje horizontal: $f(0) = 0$.

La función corta el eje de abscisas en el punto $(0, 0)$. Corte con el eje vertical:

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = 0 \rightarrow X = 0$$

La función corta el eje vertical en el punto (0, 0).

Calculemos la derivada de $f(x)$ y la igualamos a 0:

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = -\sqrt{3};\ x_2 = 0;\ x_3 = \sqrt{3}$$

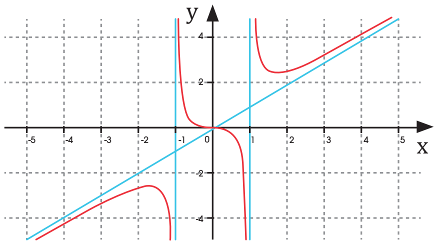
Evaluemos la función a derecha e izquierda de los puntos hallados.

	x=-2	x=-0,5	x=-0,5	x=1,5	x=2
$f'(x)$	+	0	-	-	0
$f(x)$	↗	↘	↘	↘	↗

La función presenta un máximo en $x = -\sqrt{3}$ y un mínimo en $x = \sqrt{3}$.

- Asíntotas horizontales $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- Asíntotas verticales: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$
- Asíntotas oblicua: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = 0$

La función presenta asíntotas verticales en $x = \pm 1$ y contiene una asíntota oblicua de ecuación $y = x$.



Problemas resueltos

B

Interpretación geométrica de la derivada

Solución

El crecimiento de una población invasora en un ecosistema, con 10 individuos iniciales, viene dado por la siguiente función: $f(t) = 10{\cdot}1{,}3^t$, donde t representa el tiempo en meses.

Calculemos

a. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función cuando han pasado 2 meses.

b. La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función cuando han pasado 2 meses.

- **Comprender**: Calculemos la derivada de la fución en un punto, para aplicar la fórmula de la recta tangente y posteriormente la de la recta normal.
- **Datos**: $t_1 = 2$ meses

Ejecutar el plan

a. La ecuación de la recta tangente viene dada por:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Calculemos la derivada de la función:

$$f'(t) = 10 \cdot 1{,}3^t \ln 1{,}3$$

Para $t = 2$:

$$f(2) = 10 \cdot 1{,}3^2 = 16{,}9 \quad f'(2) = 10{\cdot}1{,}3^2 {\cdot} \ln 1{,}3 = 4{,}43$$

La ecuación de la recta tangente será:

$$y - 16{,}9 = 4{,}43 \cdot (x - 2)$$
$$y = 4{,}43x + 8{,}04$$

b. La ecuación de la recta normal viene dada por:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

Sustituyendo los valores obtenidos en el apartado anterior.

$$y - 16{,}9 = \frac{-1}{4{,}43} \cdot (x-2)$$
$$y = \frac{-x}{4{,}43} + 17{,}35$$

C

Derivabilidad y continuidad

Solución

Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **Comprender**: Al tratarse de funciones polinómicas, son continuas y derivables en sus respectivos dominios. Podemos, por lo tanto, reducir el estudio de la función en el puntos $x = 2$.
- **Ejecutar el plan**: Comprobemos, en primer lugar, si la función $f(x)$ es continua en $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x - 1 = 5 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 + 1 = 5$$

$$f(2) = 3{\cdot}2 - 1 = 5$$

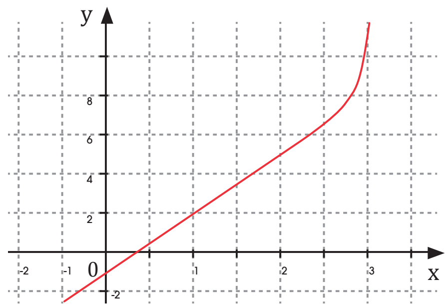
Al coincidir ambos límites con el valor de la función en el punto $x = 2$, podemos asegurar que la función es continua. Seguidamente, derivamos la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Veamos cómo se comporta la derivada en entorno a $x = 2$: $\quad f'(2^-) = 3 \qquad f'(2^+) = 4$

Los límites laterales no coinciden y, por lo tanto, la función no es derivable en $x = 2$.

Revisar: Para comprobar la solución dibujemos la gráfica y observemos que en $x = 2$ la función es continua pero no derivable, pues las pendientes no coinciden.



16. DERIVADAS Y TIC´S. GEOGEBRA

Para determinar derivadas, podemos utilizar la Vista Gráfica y los iconos:

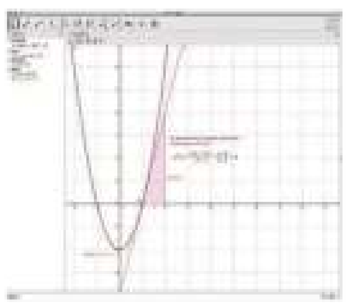
Tangentes (Tangents)

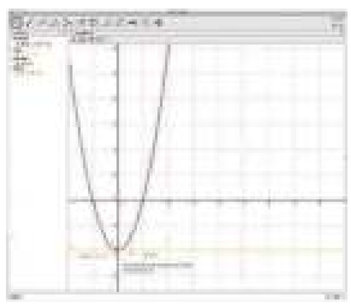
Tangentes (Slope)

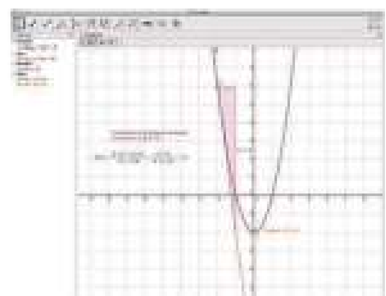
Texto

El icono Texto (Text) permite incorporar texto y fórmulas a cualquier documento GeoGebra.

http://goo.gl/HayRQO







Podemos analizar el valor de la pendiente de la tangente de la función en cada uno de los puntos indicados. Deducimos que en el punto $(1, 0)$ la función es creciente; en el $(-2, 6)$ es decreciente y, en el vértice, la función presenta un extremo relativo (mínimo).

Observa esta función: $f(x) = 2x^2 - 2$

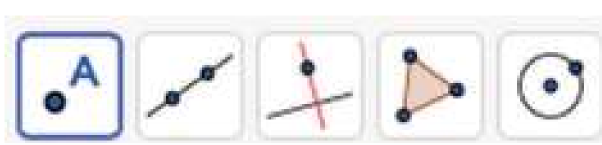
Actividades

10. **Dibuja** con GeoGebra y con ayuda de los deslizadores:

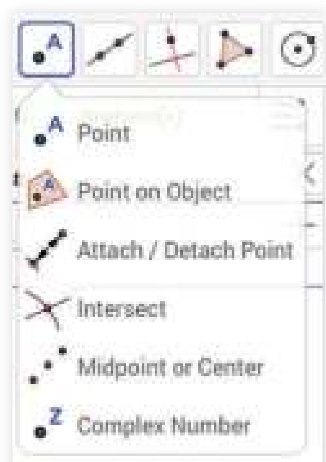
    $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^{-x}$

    a. **Estudia** el crecimiento y el decrecimiento de las dos funciones. Presta especial atención al definir los deslizadores.

    b. **Determina** el punto de intersección de $f(x)$ y $g(x)$ con los ejes. Para ello, utiliza el desplegable que aparece en el icono resaltado.



    c. **Determina** las características de la función de la figura. Selecciona cuatro puntos y halla la pendiente de cada uno de ellos.



Ejercicios y problemas propuestos

1 De límites e indeterminaciones

1. **Calcula** los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 1} (x^3+2x^2-x-10)$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2+5}{x^3-2x^2+x-3}$

c. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x-4}$

d. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-5x^2+8x+4}{x^3+x^2-8x-12}$

e. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)^2-(x-2)^3-5}{(x+1)^3-(x-2)^2-7}$

2. **Halla** los límites laterales de las siguientes funciones y decide si existe el límite:

a. $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ *para* $x = 3$

b. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2x+1}$ *para* $x=1$

3. **Calcula** los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+5}{x-2}$

b. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2-10x+25}$

c. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x^2+2x-1}{x^4-6x^3-13x^2-12x+4}$

4. **Calcula** los límites de las siguientes sucesiones:

a. $\lim\limits_{x\to 2+\infty} \dfrac{6-4n^2}{2n^2}$

b. $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{4n^2+3n-2}{2n^3-4n}$

c. $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{2n^3-4n}{4n}$

5. **Calcula** los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{3x}{x^2-4}$

b. $\lim\limits_{n\to 2+} \dfrac{3x}{x^2-4}$

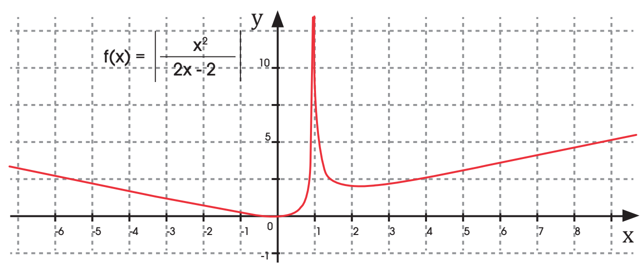
c. $\lim\limits_{x\to 2-\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1} \cdot \dfrac{x-7}{x-3}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-8x^4+2}{2x^2+4}$

6. **Calcula** a si $f(x)$ cumple: $f(x) = ax^2 - 8x$ y $\lim_{x\to 2} f(x) = -1$

$-f(x) = \dfrac{ax^2-8}{x}$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -1$

7. **Observa** la gráfica representada y **calcula**:



a. Los límites laterales en $x = 1$.

b. El límite cuando x tiende a infinito.

c. El límite cuando x tiende a menos infinito.

d. Los límites laterales en $x = 0$.

e. El límite en $x = 2$.

f. El límite en $x = -2$.

8. **Halla** el valor de *a* para que se cumpla:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+a}{x-a} - \frac{x^2-a}{x+a}\right) = 6$$

9. El siguiente límite es una indeterminación del tipo $0 / 0$:

$$\lim_{x\to +2} \left(\frac{x^2+2x-a}{x^2-bx+2}\right)$$

a. **Calcula** los valores de a y b.

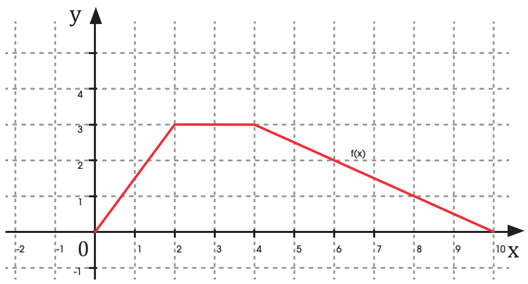
b. **Halla** el valor del límite.

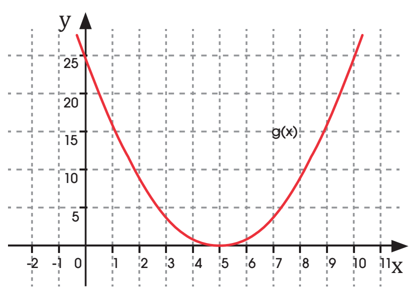
2 Tasa de variación y Derivadas

10. **Calcula** la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 3$ en los intervalos $[-1, 0]$ y $[2, 5]$.

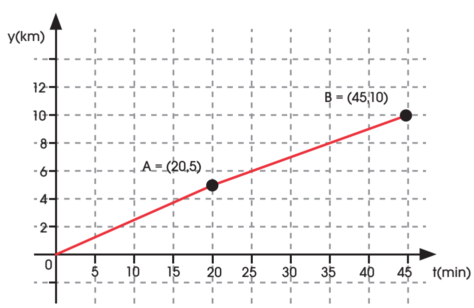
11. **Calcula** la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos:

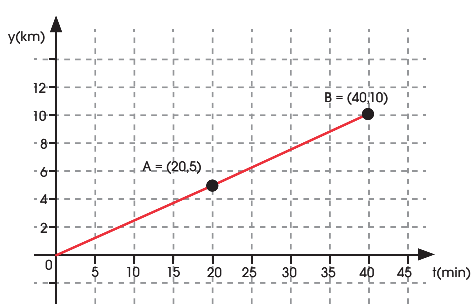
a. $[0, 2]$ b. $[2, 4]$ c. $[4, 10]$





12. Dos atletas realizan una carrera de 10 km. **Observa** sus evoluciones en las siguientes gráficas:





Para cada atleta, **halla**:

a. La tasa de variación media de los 5 primeros kilómetros.

b. La tasa de variación media de los últimos 5 kilómetros.

c. La tasa de variación media total.

d. ¿Qué significado físico tienen los valores encontrados?

13. **Calcula** la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo $[1, 1 + h]$:

a. $f(x) = x$

b. $f(x) = x^2$

c. $f(x) = \sqrt{x}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

14. Disponemos de un círculo del cual podemos modificar la longitud de su radio. **Halla** la función que representa el área del círculo y **calcula**:

a. La tasa de variación media del área en el intervalo del radio $[2, 4]$.

b. La tasa de variación media de las 10 primeras unidades.

c. La tasa de variación instantánea para $r = 2$.

d. La tasa de variación instantánea para $r = 10$.

e. La tasa de variación instantánea para $r = 100$.

—**Explica**, brevemente, cómo irá modificándose la tasa de variación instantánea según aumente el radio.

3 Derivadas

15. A partir de la definición de derivada en un punto, **halla** la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$

a. $f(x) = x + 6$

b. $f(x) = \dfrac{x}{2} - 1$

c. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

d. $f(x) = \dfrac{2}{x}$

16. **Halla** la ecuación de la recta tangente en $x = 2$, de la función $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

17. Un objeto se mueve bajo la trayectoria dada por la siguiente ecuación: $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$ Utilizando la definición de derivada, **calcula**:

a. La derivada para $x = 2$.

b. La derivada para $x = -1$.

4 Operaciones con derivadas

18. **Determina** los valores de x para los cuales la siguiente función no es derivable:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\leq x\leq 2 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

19. **Averigua** si es cierta la afirmación siguiente:

$$f(x)=\frac{k}{g(x)} \rightarrow f'(x)=-\frac{k.\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

20. **Demuestra** que la derivada de $f(x)=\text{tg}\,x$ es:

$$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

21. **Calcula** la función derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x)=x^5$
b. $f(x)=x^{-4}$
c. $f(x)=\frac{1}{x^3}$
d. $f(x)=\sqrt[3]{x}$
e. $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$
f. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

22. **Aplica** la regla de la suma para calcular las derivadas (f + g)´ y (f - g) ´ dadas:

a. $f(x)=3x^5$ $\quad g(x)=\cos x$
b. $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad g(x)=\ln x$
c. $f(x)=2x^3$ $\quad g(x)=\frac{1}{x}$
d. $f(x)=\text{sen}\,x$ $\quad g(x)=5e^5$
e. $f(x)=\log_3 x$ $\quad g(x)=3^x$

23. **Halla** un método para encontrar la función derivada de las siguientes funciones y elabora un documento explicando los pasos que has seguido para obtenerlas:

a. $f(x)=2x^3+1$
b. $f(x)=x+1$

24. **Halla** la derivada de las siguientes funciones, utilizando dos métodos distintos:

a. $f(x)=2x-6$
b. $f(x)=-x$
c. $f(x)=\sqrt{(x+1)}$
d. $f(x)=\frac{2x}{x-5}$

25. **Aplica** la regla del producto para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x)=x^6\cdot\text{sen}\,x$
b. $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$
c. $f(x)=x^2\cdot\ln x$
d. $f(x)=(x^3-2x)\cdot e^x$
e. $f(x)=\ln x\cdot\cos x$
f. $f(x)=\text{sen}\,x\cdot\cos x$
g. $f(x)=\sqrt{x}\cdot\text{sen}\,x$
h. $f(x)=3^x\cdot x$

26. **Calcula** la derivada de las funciones siguientes:

a. $f(x)=3x^4+5x^3-12x^2+3x+4$
b. $f(x)=4\ln x-x$
c. $f(x)=e^x.\ \text{sen}\,x$
d. $f(x)=4\cos x-x.\ln x$

27. **Dada** las funciones $f(x)=2x^2-4x+6$ y $g(x)=-x^2+2x$, **halla** la derivada de las siguientes funciones:

a. $h(x)=f(x)+g(x)$
b. $i(x)=g(x)-f(x)$
c. $j(x)=f(x)\cdot g(x)$
d. $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

28. **Halla** las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a. $f(x)=\ln(x+1)$ en $x=2$.
b. $f(x)=\sqrt{x-2}$ en $x=6$.
c. $f(x)=2e^x$ en $x=0$.
d. $f(x)=\ln(x+1)$ en $x=0$.

29. **Encuentra** las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la función $f(x)=x^3-3x^2-x+5$ en el punto $A=(3,2)$.

30. **Halla** la ecuación de la recta tangente de las siguientes funciones, la pendiente de la cual sea 2:

a. $f(x)=x^2-4$
b. $f(x)=-\frac{2}{x}$
c. $f(x)=x^2-4x$
d. $f(x)=\ln x$

Ejercicios y problemas propuestos

31. **Determina** los intervalos de monotonía de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
b. $f(x) = x^2 - 4$
c. $f(x) = x^3$
d. $f(x) = x^4$
e. $f(x) = x^3 - 12x$
f. $f(x) = 4x - 80$
g. $f(x) = 2 \cdot \ln x$
h. $f(x) = x^5$

5 Más a fondo

32. **Halla** los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
b. $f(x) = x^2 - 4$
c. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$
d. $f(x) = x^3 - 12x - 1$
e. $f(x) = x^2 - 2$
f. $f(x) = 3x - 20$

33. **Halla** los límites de las siguientes funciones para x cuando $\to +\infty$ y para $x \to -\infty$:

a. $f(x) = \dfrac{x}{3 - x^3}$
b. $f(x) = \dfrac{6 - x}{2 - x}$
c. $f(x) = \dfrac{6x^4 + 1}{2x^4 + 1}$
d. $f(x) = \dfrac{-6x^4 + 1}{2x^3 + 1}$

34. **Calcula** los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot 3^{x-1}$
b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{2x+2}$
c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 1}{\sqrt{2 - x} + x}$
d. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$
e. $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{(x^2 - 16)^{x-5}}$
f. $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x - 2}{2 - x}\right)^{\frac{-4}{x}}$

35. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 - 1$

$g(x) = \sqrt{2x - 8}$

$h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

$j(x) = \dfrac{(2 + x)^2 - 4}{x}$

Halla estos límites:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{h(x)}{f(x)}\right)$
b. $\lim\limits_{x \to 4} (f(x) + g(x))$
c. $\lim\limits_{x \to 2} (f(x) + g(x))$
d. $\lim\limits_{x \to -1} (f(x) \cdot j(x))$
e. $\lim\limits_{x \to 6} (f(x) \cdot h(x))$
f. $\lim\limits_{x \to 2} [f(x)]^{f(x)}$

36. **Calcula** la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 9$ por los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$, y **escribe** la ecuación de dicha recta.

37. El movimiento de un proyectil viene dado por la siguiente ecuación: $f(x) = 5 + 3t - 4{,}9t^2$, donde x es la posición en metros y t es el tiempo en segundos. **Calcula**:

a. La velocidad para $t = 0$ s.
b. La velocidad para $t = 2$ s.
c. La velocidad en cualquier punto.
d. La aceleración para $t = 0$ s.
e. La aceleración en cualquier punto.
f. **Encuentra** la derivada enésima.

38. **Halla** las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos de corte con los ejes de abscisas de la función: $f(x) = x^2 + x - 2$

Comprueba la solución dibujando la parábola y las tangentes con un programa informático.

39. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $f(x) = x^3 + x - 2$ en el punto de abscisa $x = \dfrac{1}{2}$

—**Escribe** la ecuación de dicha recta.

40. **Considera** la función $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ y **encuentra** la tangente y la normal para $x = 2.$ 2

41. **Halla** la función derivada de cada una de las funciones siguientes:

a. $f(x) = 10\sqrt{x}$
b. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
c. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$
d. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

42. Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo tiene una longitud de b = 3 cm:

a. **Calcula** la derivada de la hipotenusa a como función dependiente del cateto c.
b. **Determina** los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Ejercicios y problemas propuestos

43. **Determina** los intervalos de monotonía de las siguientes funciones y los máximos y mínimos:

a. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

b. $f(x) = \text{sen}\,(2x), x \in [0, p]$

c. $f(x) = e^{x^2} - 1$

d. $f(x) = (x-2)^3$

e. $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$

f. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

44. Las trayectorias de dos cuerpos vienen definidas por las siguientes funciones:

$f(t) = 2t^2 - 5t + 1$ $\quad$ $g(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$

a. **Determina** los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada uno de ellos.

b. **Halla** los extremos de cada una de las trayectorias.

45. Considera la función $f(x) = x \cdot e^x$ y **determina**:

a. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b. Los máximos y mínimos.

46. El movimiento de un objeto viene dado por la siguiente ecuación: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Determina:

a. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b. Los máximos y mínimos.

47. **Aplica** la fórmula de la derivada de un producto para calcular la función derivada de f en cada caso:

a. $f(x) = x^2 \,.\, \text{sen}\, x$

b. $f(x) = x \,.\, \ln x$

48. **Aplica** la fórmula de la derivada de un cociente para calcular la función derivada de f en cada caso:

a. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

b. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

49. Dada la función $f(x) = x^2 - 7x + 1$, **averigua** el valor de la derivada en los puntos de abscisa

$x = -2, x = 2$ y $x = 10$.

50. **Determina** la ecuación de la recta tangente y la recta normal a las siguientes funciones en el punto indicado:

a. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ para $x = 1$

b. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ para $x = 3$

c. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ para $x = -1$

d. $f(x) = \ln x$ para $x = 1$

e. $f(x) = \cos x$ para $x = p$

51. **Calcula** las derivadas de las siguientes funciones utilizando las propiedades de la suma, el producto o el cociente de derivadas:

a. $f(x) = 3x^2 + \text{sen}\, x$

b. $f(x) = \ln x \cdot (x^2 + 2x + 1)$

c. $f(x) = \dfrac{x \cdot \cos x}{\sqrt{x+1}}$

d. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x+1}}$

52. **Estudia** la monotonía de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \cos(\pi x)$

b. $f(x) = x^3 - 1$

c. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

d. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

e. $f(x) = e^x$

f. $f(x) = \ln x - x$

53. **Aplica** la regla de la cadena para calcular la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = (2x+3)^2$

b. $g(x) = \text{sen}\, 5x$

c. $h(x) = e^{\text{cob}\, x}$

d. $i(x) = \ln(\text{sen}\, x^2)$

e. $j(x) = \cos^2 x^3$

f. $k(x) = \sqrt{\text{sen}\, x}$

54. Dada la función $f(x) = x^2 - 7x + 1$, **averigua** el valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -3$, $x = 4$ y $x = -5$.

55. Dada la función $f(x) = \text{sen } x \, . \cos x$, **comprueba** que la función derivada se anula en el punto de abscisa $x = \pi / 4$

—¿Cómo será la tangente en dicho punto, con respecto al eje de abscisas?

56. **Averigua** la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $f(x)=x \, . \ln x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

57. **Determina** los extremos relativos de las siguientes funciones:

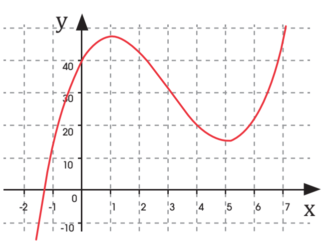
a. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

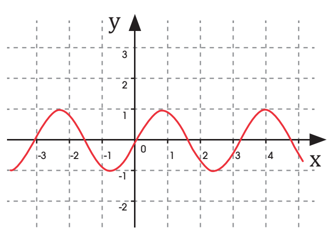
b. $f(x) = \text{sen } (\pi x)$

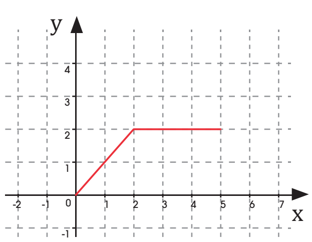
c. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + x + 1)}$

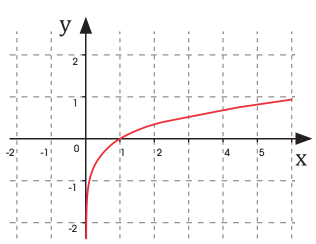
d. $f(x) = x \cdot \ln x$

58. En las siguientes gráficas de funciones, **indica** los intervalos en los cuales la derivada de la función será positiva y los intervalos en los que será negativa. Razona tu respuesta.









59. **Calcula** los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + 4x^2 - 18}{x^4 + 3x - 6}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 5x - 18}{3x - 6}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 2x}{2x^2}$

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x}{500x^2}$

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

f. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{x} : \dfrac{x - 1}{x^2 + 5} \right)$

g. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^5 - 4x^3}{2x^2 - 8}$

h. $\lim\limits_{x \to +2} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^2 + 4x + 4}$

60. Los beneficios de una empresa vienen dados por la siguiente ecuación: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$, donde x son los años transcurridos y f(x), el beneficio en miles de dólares.

Calcula: El momento en el cual el beneficio sea mínimo. El valor de este beneficio.

61. **Calcula** la función derivada de cada una de las funciones siguientes:

a. $f(x) = \text{tg } 3x$

b. $f(x) = ex^2 . \text{ sen } 3x$

62. **Halla** los vértices de las siguientes parábolas:

a. $f(x) = x^2 - 4$

b. $f(x) = 4x^2 - 16$

c. $f(x) = x^2 - 4x$

d. $f(x) = x^2 + x - 6$

e. $f(x) = x^2 - 4x + 4$ d)

f. $f(x) = -2 \, (x + 3)^2 - 8$

g. $f(x) = - x^2 + 3(x + 2) - 1$

h. $f(x) = (x + 3)^2$

A continuación, deriva las expresiones, **busca** los extremos y comprueba que coinciden con los vértices que has encontrado.

a. ¿En qué casos se trata de máximos? ¿Y de mínimos?

b. ¿Qué relación tienen los extremos relativos con los coeficientes de la parábola?

63. **Determina** los valores de a, b y c de la parábola $f(x) = x^2 + bx + c$, para que su vértice esté en el punto $(2, 1)$.

64. **Estudia** la monotonía y los extremos de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ < 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} -(x - 1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ejercicios y problemas propuestos

65. Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 centavos de $ la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada centavo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 centavos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál será ese beneficio?

66. El mismo heladero del problema anterior para vender sus helados quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 dm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

67. Si el movimiento de un proyectil viene dado por la ecuación $x(t) = 5t^2 + 2t - 2$, siendo x la distancia expresada en metros y t el tiempo en segundos, **calcula**:

    a. La velocidad inicial.
    b. La velocidad después de 3 segundos.
    c. La aceleración inicial.
    d. La aceleración después de 10 segundos.

68. La producción de frutillas en un invernadero $(Q(x)$ en kg) depende de la temperatura (x en ºC) según la expresión: $Q(x) = (x + 1)^2(32 - x)$

    a. **Calcula** razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.
    b. ¿Qué producción de frutilla se obtendría?

69. Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.

    a. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?
    b. ¿Cuál será esa producción?

70. El costo total de la producción de q unidades de cierto producto se describe por medio de la función.

    $c = 100\,000 + 1\,500q + 0{,}2q^2$ donde C es el costo total expresado en dólares.

http://goo.gl/2vcGk8

Ejercicios y problemas propuestos

http://goo.gl/hwnaeq

a. **Determina** cuántas unidades q deberían fabricarse a fin de minimizar el costo promedio por unidad.

b. ¿Cuál es el costo total de fabricación en este nivel de producción? ¿Cuáles son las dos formas en que puede calcularse esta cita?

71. Una compañía estima que la demanda anual de su producto fluctúa con su precio. La función de demanda es $q = 180.000 - 250\,p$ donde q es el número de unidades demandadas y p el precio en dólares. El costo total de producir q unidades se estima con la función

$C = 350\,000 + 300q + 0{,}001q^2$

Determina cuantas unidades q deberían producirse con objeto de maximizar la utilidad anual.

¿Qué precio debería fijarse?

¿Cuál se espera que sea la máxima utilidad anual?

72. Para almacenar agua en una escuela rural se quiere fabricar un tanque metálico, cuya capacidad debe ser de 4 000 litros. ¿Qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

73. Una piedra es lanzada siguiendo una trayectoria parabólica, dada por la ecuación $h = -t^2 + 8t - 13$, donde h es la altura en metros y t el tiempo en segundos. **Halla** el tiempo en que alcanza su altura máxima y el valor de esta.

74. Cuál es la altura máxima que alcanza una pelota de fútbol que se lanza siguiendo una trayectoria parabólica, cuya ecuación es

$$h= -\frac{1}{4}t^2+60t$$

donde h es la altura en metros y t el tiempo en segundos.

—¿En qué tiempo alcanza la altura máxima?

75. Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices. **Calcula** el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.

3 Resumen

DERIVADAS

Tasa de variación

Tasa de variación media (TVM):

$$TVM_{[a,b]} f(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Tasa de variación instantánea (TVI):

$$TVI_a f(x) = \lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Derivada de una función

Derivada de una función en un punto $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(b)-f(a)}{x-a}$$

La derivada de una función en un punto es el valor de la pendiente de la recta tangente en este punto.

recta tangente: $y - f(a) = f'(a) \cdot (x-a)$

recta normal: $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x-a)$

Continuidad: una función derivable en un punto es continua en este punto.

Función derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$f'(x)$ asigna a cada punto de la función f el valor de su derivada.

Derivada segunda:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

Cálculo de derivadas

Funciones elementales:

Función	Función derivada
$f(x) = k,\ k \in R$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = nax^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

Suma de funciones:

$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Producto de dos funciones:

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Cociente de dos funciones:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Composición de funciones:

$f(x) = (g \circ h)(x)$

$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Aplicación de las derivadas

monotonía de una función

extremos de una función

optimización de funciones

Para finalizar

1 **Calcula** la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 3$ en los intervalos $[-1, 0]$ y $[2, 5]$.

2 **Calcula** la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 9$ por los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 2$ y **escribe** la ecuación de dicha recta.

3 El valor de un mineral es directamente proporcional al cuadrado de su masa. Si hemos extraído un mineral de 50 g y lo queremos dividir en dos trozos que minimicen su precio, **encuentra** la masa de los dos trozos.

4 Dada la siguiente función: $f(x) = x^2 - 2x + 4$

a. La tasa de variación media en el intervalo $[2, 3]$.

b. La tasa de variación instantánea para $x = 1$.

c. La ecuación de la recta tangente para $x = 0$.

d. La ecuación de la recta normal para $x = 0$.

e. Las n derivadas primeras.

f. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

g. Los máximos y los mínimos.

5 **Indica** los intervalos de monotonía de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 2x + 5$ c. $g(x) = x^2 - 3x + 5$

b. $h(x) = \dfrac{3}{x-1}$

6 Dada la función: $f(x) = \dfrac{5}{3x-2}$, $x \neq \dfrac{2}{3}$

Determina:

a. La tasa de variación media en el intervalo $[1, 2]$.

b. La tasa de variación instantánea para $x = 1$.

c. La tasa de variación instantánea para $x = 0$.

d. La ecuación de la recta tangente para $x = 0$.

e. La ecuación de la recta normal para $x = 0$.

f. La continuidad y la derivabilidad.

g. La segunda derivada.

h. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

7 Se dice que una función derivable varias veces en $x = a$ tiene un punto de inflexión en $(a, f(a))$ si $f''(a) = 0$ y el mínimo n tal que $f(n)(a) = 0$ es impar. **Investiga** en Internet qué relación tienen los puntos de inflexión con la curvatura de una función y encuentra los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3$

b. $f(x) = (x + 2)^2 (x - 1)^3$

c. $f(x) = \text{sen } x + \cos x$, con $x \in [0, 2\pi]$

d. $f(x) = xe^x$

EVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal

¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? | ¿He cumplido mis tareas? | ¿Qué aprendí en esta unidad temática?

- Trabajo en equipo

¿He compartido con mis compañeros y compañeras? | ¿He respetado las opiniones de los demás?

- **Escribe** la opinión de tu familia.

- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

Teoría de los extremos

Uno de los conceptos que relaciona las derivadas con la geometría es la teoría de los extremos: la derivada en los máximos y mínimos de una función se anula. Así lo enunció el jurista y matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665). También es conocido por su llamado último teorema de Fermat, que no fue resuelto hasta 1995.

SOCIEDAD

La derivada y su notación

Las reglas del cálculo de las derivadas se deben al británico Isaac Newton (1642- 1727) y al alemán Gottfried Leibniz (1646-1716). Aunque sus trabajos coincidieron, mantenían cierta diferencia de criterios en aspectos como la manera de nombrar la derivada de una función; mientras que Newton la expresaba como $f(x)$, Leibniz lo hacía con $\frac{dy}{dx}$.

Años más tarde, el italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) introdujo la notación $f'(a)$ para referirse a la derivada de una función en un punto.

OPINION

La maratón

«Si quieres ganar, corre cien metros.
Si quieres experimentar la vida, corre una maratón».

Esta afirmación la realizó el gran atleta y medallista olímpico de origen checo, Emil Zátopek (1922-2000), más conocido como la Locomotora humana. La frase hace referencia a la experiencia vital que supone correr una carrera de este tipo, más allá de las victorias y marcas que se puedan conquistar.

Esta y otras pruebas deportivas pueden ser estudiadas matemáticamente a través de las derivadas; en el caso de la maratón, puede analizarse cómo varía la velocidad del atleta a lo largo de cada instante de dicha carrera. Accede a http://links.edebe.com/mx94x y conocerás en qué consiste la relación existente entre esta prueba deportiva y la derivación de funciones. Entra también en http://links.edebe.com/bdkxk y http://links.edebe.com/5ys para obtener más información sobre las aplicaciones de las derivadas en otros deportes.

SENTIDO CRÍTICO

Economía y derivadas

En economía, las derivadas también pueden resultar útiles; por ejemplo, para conocer a partir de qué nivel de producción los costes serán mínimos, sabiendo la función de los costes de fabricación. Supongamos que el coste de un producto viene dado por la función $C(x) = \frac{x^2}{5} + 2x + 300$, donde x es la cantidad de unidades producidas. ¿Qué nivel de producción tendrá un coste mínimo por unidad? ¿Cuál será dicho coste?

SI YO FUERA

Economista...

Elaboraría un buen plan de optimización para mi empresa y la de mi familia, que garantice un exitoso proceso de producción, donde esté implícita la reducción de gastos y costos, y se priorice la calidad del producto, todo esto gracias a los conocimientos adquiridos mediante la aplicación de modelos matemáticos, como los estudiados en esta unidad.

ESTAS FOTOS MUESTRAN ALGUNAS DE LAS PEQUEÑAS EMPRESAS QUE EXISTEN EN NUESTRO PAÍS:


http://goo.gl/cq8pzU

http://goo.gl/cq8pzU


http://goo.gl/cq8pzU


http://goo.gl/33YSEI


http://goo.gl/7SYPEv


http://goo.gl/lSFZnK

ELEGIMOS

1. ¿Me gustaría crear mi propia empresa?
2. ¿Qué pasos debo dar para formar esta pequeña empresa?
3. Con algunas de las herramientas matemáticas que ya poseo, ¿puedo dar los primeros pasos?
4. ¿Es suficiente con tener el capital para tener un negocio exitoso?, ¿qué condiciones se necesitan?

PLANIFICAMOS

Si accedes a estos u otros sitios puedes infórmarte sobre los pasos que debes seguir para formar una empresa e información económica importante:

www.supercias.gob.ec

www.negociosyemprendimiento.org/

www.gerencie.com

www.auladeeconomia.com/moneda-apuntes.htm

DESARROLLAMOS

Teniendo en cuenta lo investigado sobre cómo crear una empresa:

5. **Escoge** una empresa que te gustaría formar, cuál sería el producto principal y qué nombre le pondrías
6. **Elabora** con un compañero una serie de medidas que pondrán en marcha para que su empresa tenga éxito.
7. **Crea** una lista de todos los materiales que necesitan para elaborar este producto. (ficha de costo)
8. **Analiza** y **explica** como pueden optimizar el proceso de producción de la empresa.
9. Con lo estudiado en esta unidad, confecciona y resuelve tres problemas de optimización para tu empresa.
10. **Representa** mediante gráficas, el rendimiento de tu empresa.
11. **Elabora** un balance económico de tu empresa.
12. **Redacta** un informe con todo lo realizado en este proyecto, donde incluyan además el balance económico, los problemas que plantearon y una muestra del producto de su empresa.
13. **Realiza** una discusión en un taller grupal sobre los resultados, qué aspectos fueron negativos y cuáles positivos.

    Este informe tendrá una calificación, al igual que los pasos anteriores.

http://goo.gl/bzLRWC

Repasamos

Resumen Fórmulas

1 Números reales

Propiedades de las potencias
Si a, b y c son números reales y m y n, números racionales, se cumple:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0)$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

Propiedades de las potencias
Definición:
$\log_b x = a \qquad b^a = x$
Propiedades:
$\log (x \cdot y) = \log x + \log y$
$\log \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log x - \log y$
$\log (x^n) = n \cdot \log x$
$\log \sqrt[n]{x} = \dfrac{\log x}{n}$
$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

	Función	Función derivada
Función constantes	$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Función potencial	$f(x) = ax^n$	$f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
Función exponecial	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
Función logarítmica	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
Función seno	$f(x) = \text{sen } x$	$f'(x) = \cos x$
Función coseno	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{sen } x$

La derivada de una función f en x, se representa por $f'(x)$ y queda definida de la siguiente manera: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

En este caso, f debe ser **continua** y **derivable** en x.

Derivada de la función suma	Derivada del producto de una constante por una función
$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$	$f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$
Derivada de la función producto	**Derivada de la función cociente**
$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$	$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

Derivada de la función compuesta: regla de la cadena
$f(x) = (g \circ h)(x) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Repasamos

Unidades 1, 2, 3

1 **Considera** los intervalos de los números reales

$A = (-\infty, 1)$ y $B = (-1, +\infty)$.

Indica el intervalo correspondiente a la unión $A \cup B$.

a. $(-1,1)$ b. $[-1, 1]$ c. $(-\infty,+\infty)$

2 ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{4}, \sqrt{7^3}, \sqrt[6]{2}$

a. $\sqrt[6]{4^2} \cdot 7^3 \cdot 2$

b. $\sqrt[15]{4^2 \cdot 7^3 \cdot 2}$

c. $\sqrt[6]{4 \cdot 7 \cdot 2}$

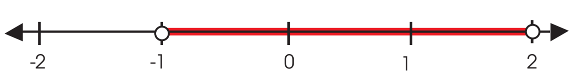
3 El resultado de racionalizar la expresión $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$ es:

a. $-2-\sqrt{5}$

b. $2+\sqrt{5}$

c. $-2+\sqrt{5}$

4 **Considera** el conjunto de números reales representado en esta recta e **indica** a qué intervalo corresponde.



5 **Efectúa**:

a. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}$

b. $\frac{\sqrt[3]{x^2 y^3}}{\sqrt[3]{xy}}$

c. $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^4$

d. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^5}}$

6 **Efectúa**:

a. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}$

b. $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt[3]{25}$

c. $\sqrt[3]{a^3 b} \cdot \sqrt[6]{ab^4}$

d. $3\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{8}$

e. $\frac{\sqrt[4]{x^3 y^3}}{\sqrt[3]{xy}}$

f. $\frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

g. $\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{10}}$

h. $\frac{\sqrt[5]{(a+b)^3}}{\sqrt{a+b}}$

i. $\sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{\sqrt[5]{xy}}{\sqrt{xy^3}}$

7 **Escribe** en forma de potencia las siguientes expresiones:

a. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}$

b. $\sqrt{\sqrt[3]{x^2 \sqrt[5]{x^3}}}$

c. $\sqrt{n\sqrt[5]{n\sqrt[6]{n}}}$

8 **Racionaliza** las siguientes expresiones:

a. $\frac{3}{\sqrt{5}}$

b. $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

c. $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$

d. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}$

e. $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

f. $\frac{x}{\sqrt[5]{x^2}}$

9 **Efectúa**:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2-\sqrt{3}}$$

(Recomendación: racionaliza previamente cada uno de los sumandos.)

10 **Expresa** mediante intervalos los valores que puede tomar m en cada caso:

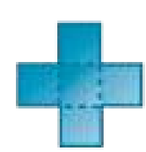
a. $\sqrt{m+3}$

b. $\sqrt{2m-1}$

c. $\sqrt{2-m}$

d. $\sqrt{\frac{2+m}{3}}$

11 La cruz de la figura está formada por cinco cuadrados iguales. **Calcula** el área de la cruz sabiendo que su perímetro es igual a $\sqrt{12}$ cm.



12 **Representa** en la recta real los siguientes conjuntos:

a. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$

b. $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$

c. $C = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$

d. $D = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\}$

14 **Halla** el cociente y el resto de las siguientes divisiones mediante la regla de Ruffini:

a. $(2x^4 - 4x^3 - 5x + 3) : (x - 2)$

b. $\left(-x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4\right) : \left(x - \frac{5}{2}\right)$

15 **Representa** las soluciones de las siguientes inecuaciones:

a. $5x - 3(1 - 4x) \leq 4x - 1$

b. $\frac{5x - 2}{3} - \frac{x - 3}{2} \geq \frac{x - 2}{3} + \frac{29}{6}$

c. $7(2x - 1) - 3x \leq 2(x + 1) - 9$

d. $3(x - 7) + 2x \leq 5(x - 1)$

16 **Representa** las soluciones de las siguientes inecuaciones:

a. $\frac{x - y}{2} < \frac{5 - x + y}{3}$

b. $\frac{x - y}{3} < y - 4$

c. $\frac{2x - y}{2} - \frac{3y - 12}{3} < 0$

17 **Resuelve**:

a. $(x - 2)(x + 1) \geq 18$

b. $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

c. $x^2 + x + 1 < 0$

d. $\frac{x - 3}{4} > (x - 2)(x + 7) + 17$

18 Las notas obtenidas por un estudiante en dos pruebas son 6 y 7. ¿Qué nota puede haber obtenido en la tercera prueba si su nota media está comprendida entre 6,5 y 7,5?

19 Una pintora desea trabajar sobre un lienzo rectangular cuyo lado mayor tenga el doble de longitud que el menor. ¿Cuánto ha de medir el lado menor para que la superficie con la que cuente sea mayor que 1,28 m^2?

20 Una profesora informa a sus 35 alumnos de que el triple del número de aprobados es menor que el doble del número de suspendidos. ¿Cuál ha sido el número máximo de aprobados?

21 El actual código de circulación resta puntos del carné de conducir a los conductores que transgreden los límites de velocidad permitidos.

- 2 puntos. Si se supera el límite de velocidad entre 21 y 30 km/h.
- 3 puntos. Si se sobrepasa el límite de velocidad entre 31 y 40 km/h.
- 4 puntos. Si se conduce a una velocidad superior en 40 km/h o más al límite permitido, siempre que no suponga, además, un exceso del 50 %.
- 6 puntos. Si se excede en más del 50 % el límite de velocidad máxima permitida, siempre que ello suponga superar, al menos, en 30 km/h dicho límite.

El límite máximo de velocidad de una carretera es de 100 km/h.

Indica a qué velocidad circulaba un conductor al que le han quitado:

a. 2 puntos

b. 3 puntos

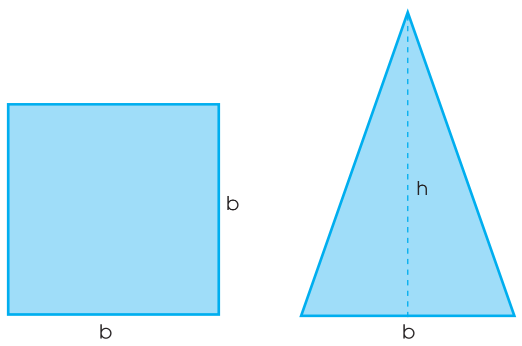
c. 4 puntos

d. 6 puntos

22 **Resuelve** la siguiente operación, utilizando las propiedades de los logaritmos.

$\log\left(\sqrt{8 + 3\sqrt{7}} + \sqrt{8 + 3\sqrt{7}}\right) + \log\left(\sqrt{8 + 3\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 3\sqrt{7}}\right)$

23 **Calcula** para que valores de h el área del triángulo es mayor que el área del cuadrado.



24 Para un viaje de fin de curso un grupo de alumnos recauda entre \$ 600 y \$ 700 vendiendo bocadillos y refrescos. Calcula el dinero que han obtenido proveniente de la venta de refrescos si...

—Venden el triple número de refrescos que de bocadillos.

—El precio de los bocadillos es el mismo que el de los refrescos.

25 Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 16 cm y su área está comprendida entre 80 y 96 cm^2. ¿Cuánto puede medir el otro cateto?

26 Un profesor informa a sus 35 alumnos que el triple del número de aprobados es menor que el doble del número de suspendidos. ¿Cuál ha sido el número máximo de aprobados?

27 La base de un rectángulo mide 2 cm más que su altura, y su área no supera los 35 cm^2. ¿Cuál puede ser la altura del rectángulo?

28 **Resuelve** estas ecuaciones:

a. $\sqrt{5x^2} - \sqrt{80} = 0$

b. $\sqrt{5x^2} - 2x = 0$

c. $x^2 - 2\sqrt{2x} + 2 = 0$

29 Un rectángulo mide $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ cm de base y tiene una altura de $\sqrt{4 - \sqrt{5}}$ cm. **Calcula** su área:

a. Redondeando los valores a las milésimas;

b. Desarrollando el producto de radicales y redondeando $\sqrt{5}$ a las milésimas.

—En qué caso se comete un error absoluto mayor? ¿Por qué?

30 **Halla** a para que la división sea exacta:

$(x^5 - 3x^3 + ax^2 - 4) : (x - 2)$

Calcula el cociente y el resto de la división de $P(x) = 7x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1$ entre $Q(x) = x + 1$. A continuación, **calcula** el valor de $P(-1)$. ¿Qué observas?

31 Una empresa tiene dos centros de montaje, A y B, de un determinado producto industrial. El número de unidades montadas en el centro A está dado por $-4t^2 + 64t$, donde t es el número de horas trabajadas. La producción en B es $-t^3 + 15t^2 + 2t$ unidades en una jornada de t horas de trabajo.

a. **Expresa** la producción total.

b. ¿Cuántas unidades se montan en la primera hora de trabajo?

c. ¿Cuántas unidades monta la empresa durante 4 horas de trabajo?

d. ¿Cuándo se trabaja con más eficacia: en la primera hora o en la segunda?

32 Galileo descubrió que los cuerpos caen con la misma aceleración, independientemente de su masa. El movimiento de un cuerpo que se deja caer desde una cierta altura se expresa mediante el polinomio $P(t) = (1/2)\,at^2$, donde t indica el tiempo, en segundos, que el cuerpo lleva cayendo, g es la aceleración de la gravedad en la Tierra (9,8 m/s^2) y $P(t)$ es el valor del espacio, en metros, recorrido en ese tiempo t.

a. **Calcula** a qué altura estará un sólido si tarda un segundo en llegar al suelo.

b. **Calcula** a qué altura estará si tarda medio segundo.

c. Un paracaidista salta desde 3 800 metros de altura. Si tiene que abrir el paracaídas a 1 500 metros del suelo, ¿cuánto tiempo debe pasar antes de abrirlo?

Funciones reales y racionales

33 **Indica** si las siguientes relaciones son funciones o no. Respecto a las que sean funciones, **escribe** la ecuación correspondiente y **represéntala**.

a. La tarifa de una taxi es 3 \$ de bajada de bandera, más 0,80 \$ por kilómetro recorrido.

b. Los minutos jugados por un baloncestista y los puntos encestados.

c. La velocidad que toma un objeto en caída libre con el tiempo transcurrido.

Y TAMBIÉN: ¿?

Los decibelios

La intensidad de un sonido es la propiedad por la cual lo percibimos como débil o fuerte. Está relacionada con la intensidad acústica, que es la energía transportada por las ondas sonoras por unidad de tiempo y de superficie perpendicular a su dirección de propagación. La intensidad percibida por el oído humano o sensación sonora (S) depende de la intensidad acústica del sonido recibido (I) y de la sensibilidad del oído. Se define de modo que el valor 0 corresponda a la mínima intensidad acústica perceptible, I_0. Sus unidades son los decibelios (dB):

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

El valor medio de la intensidad umbral I_0 *es:* $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$.

Euler (1707-1783), en su libro *Introductio in analysis infinitorum* (1748), clasificó las funciones a partir de su expresión analítica.

Enumeró, en primer lugar, las operaciones algebraicas y, posteriormente, las operaciones trascendentes, como la exponencial y la logarítmica.

http://goo.gl/b28bJJ

La sensación sonora asociada a las olas en la costa es de 40 dB, mientras que el nivel asociado a un susurro es de 10 dB. ¿Cómo están relacionadas sus intensidades acústicas?

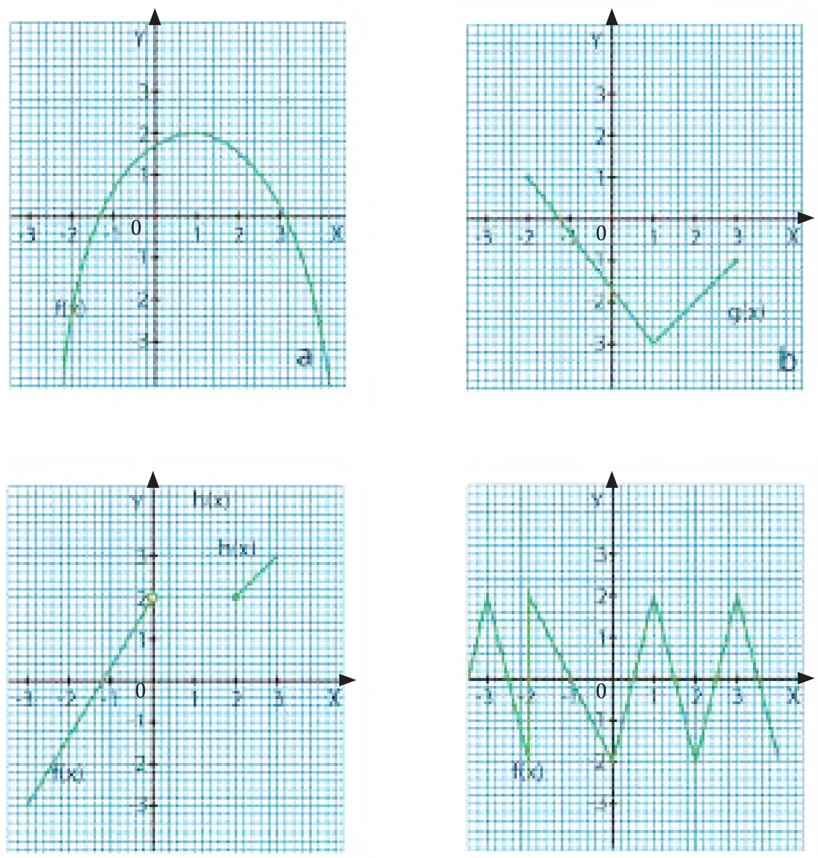
Funciones reales y racionales

34 **Halla** el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \dfrac{5}{x-3}$

b. $f(x) = \sqrt{(x-2)}$

35 **Determina** el dominio y el recorrido de cada una delas funciones siguientes a partir de su gráfica.



36 **Halla** la monotonía, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos absolutos y relativos y el corte con los ejes de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 - 5x + 4$

b. $f(x) = \dfrac{-x+1}{2}$

c. $f(x) = \sqrt{(2x-8)}$

—**Comprueba** los resultados representando las funciones con el programa GeoGebra u otro programa informático.

37 Existen varios métodos para dibujar parábolas. Uno de los más sencillos es el que utilizan los sastres para coser una tela en forma de curva.

TIC

Lee cómo hacerlo en el siguiente enlace y **responde** a las cuestiones que se plantean a continuación:

http://goo.gl/nAqzQ5

a. ¿Cómo se dibuja una parábola con el método de sastre?

b. **Abre** http://www.geogebra.org/cms/en/download. Para facilitar las cosas, cogerás el ángulo que forman los ejes.

c. **Dibuja** una recta que pase por los puntos (15, 0) y (0, 1). A partir de ahí, **completa** la parábola.

d. **Dibuja** una recta que pase por (16, 0) y (0, 4) y completa la parábola. ¿Qué diferencias observas respecto a la parábola anterior?

38 **Representa** con el *software* en línea que creas conveniente las gráficas de las siguientes funciones y di cuáles son sus asíntotas:

a. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$

b. $f(x) = \dfrac{4x^3 - 1}{x^2}$

c. $f(x) = \dfrac{3}{x + 2}$

39 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{5}{3x - 2}$$

Calcula:

a. El valor de la función para los valores $x = -2, x = 1, x = 2.$

b. **Halla** el dominio y el recorrido.

c. **Representa** la función.

d. **Halla** los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos, los puntos de corte con los ejes, la periodicidad y la simetría de la función.

40 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt{x - 2}$ $\quad g(x) = \ln(x + 1)$

a. **Calcula** el valor de las funciones para $x = 2$ y para $x = 4$.

b. **Efectúa** el estudio de las dos funciones.

c. **Representa** las dos funciones.

d. **Halla** los puntos de corte entre las dos funciones.

e. **Calcula** $(f \circ g)$

41 Si $f(x = x^2 - 1, g(x) = 2x + 3$ y $h(x) = 2x + 1$ **halla**:

a. $f(x) + g(x)$

b. $f(x) + h(x)$

c. $h(x) - g(x)$

d. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

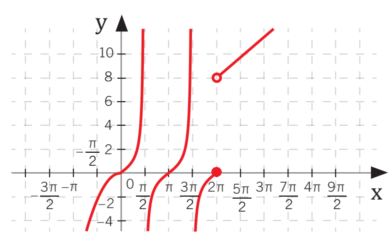
e. $g(x) - h(x)$

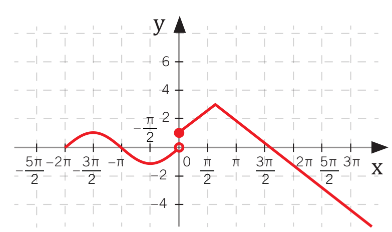
f. $f(x) \cdot g(x)$

g. $g(x) \cdot h(x)$

h. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

42 **Halla** los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos y la intersección con los ejes de las siguientes gráficas de funciones:





43 **Representa** gráficamente las siguientes funciones e **indica** el dominio y el recorrido de cada una de ellas.

a. $f(x) = -\sqrt{x}$

b. $g(x) = -\sqrt[3]{x}$

c. $h(x) = \sqrt{(x - 5)}$

d. $i(x) = f(x) = \sqrt[3]{-x}$

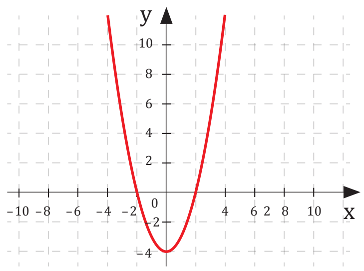
44 Un agente inmobiliario recibe al mes un sueldo bruto de $ 1 200 ·, más $ 90 por cada vivienda que venda.

a. **Escribe** la expresión analítica de la función que indica el sueldo mensual del agente según las viviendas que logra vender.

b. **Represéntala** gráficamente.

c. **Comenta** su dominio y su recorrido

45 **Halla** la expresión analítica de la siguiente función:



46 **Halla** la ecuación de la parábola que contiene los puntos (0, 4), (−1, 1) y (2, −2).

47 **Calcula** las coordenadas del vértice de las siguientes funciones.

a. $y = 3x^2 - x + 1$

b. $y = 6x^2 - 2x + 9$

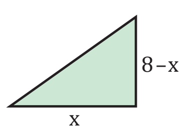
c. $y = -10x^2 - 5x + 7$

d. $y = 8x^2 + 8x - 11$

48 **Determina**, para el siguiente triángulo rectángulo:

a. La función que relaciona el área con la longitud de la base.

b. El área máxima.



49 **Halla** el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 5x - 1$

b. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$

c. $f(x) = \dfrac{2}{x}$

d. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$

e. $f(x) = \sqrt{x+3}$

f. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-2}}$

50 **Representa** gráficamente las siguientes funciones e **indica** el dominio y el recorrido de cada una de ellas.

a. $f(x) = 5\sqrt{x}$

b. $f(x) = \sqrt{(x+4)}$

51 **Considera** las siguientes funciones $f(x) = x^2 - 15$, $g(x) = \dfrac{x-2}{x+5}$ y $g(x) = \sqrt{x}$. **Calcula** las funciones compuestas que se indican a continuación:

a. $g \circ f$

b. $f \circ g$

c. $h \circ g \circ f$

d. $h \circ g$

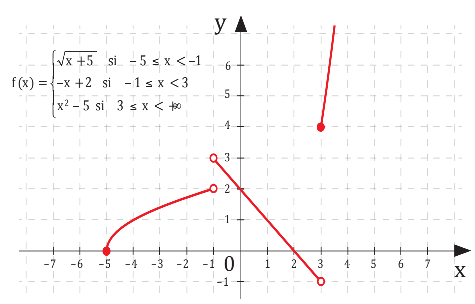
e. $f \circ h$

f. $g \circ h \circ f$

52 **Comprueba** que la composición de las siguientes funciones es conmutativa y **explica** por qué.

$f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

53 **Observa** la función representada y **halla**:



a. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

b. $\lim\limits_{x \to +3^-} f(x)$

c. $\lim\limits_{x \to +3^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x \to +1} f(x)$

e. $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$

f. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

54 Sea la función $q(y) = f \circ g$, y $q(y) = \sqrt{(2y-3)}$. Determina las funciones f y g.

55 **Escribe** la función $t(x) = x^2 + 4x + 4$ como la composición de dos funciones.

56 **Escribe** la función $s(x) = x^2 + 3x + 2$ como

a. El producto de dos funciones;

b. La suma de dos funciones.

57 **Calcula** la tasa de variación media de la función $f(x) = -2x + 5$, en los intervalos $[-5, -3]$, $[3, 5]$ y $[10, 20]$.

58 **Calcula** los límites en $+\infty$ y $-\infty$ de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 4x^3 - 1$

b. $f(x) = 3x^2 + 6$

c. $f(x) = -3x^5 + 5$

d. $f(x) = -x^4 - x^3 + 2x - 2$

e. $f(x) = 5$

f. $f(x) = -3$

59 **Calcula** la tasa de variación media de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, h]$, para $h = 1$, $h = 0{,}1$ y $h = 0{,}01$.

—¿Hacia qué valor tiende la tasa de variación media conforme h se hace cada vez más pequeña?

60 **Halla** el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{5}{x-3}$

b. $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-6x+5}$

c. $h(x) = \sqrt{x+1}$

d. $i(x) = \sqrt{2-x^2}$

e. $j(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

f. $k(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

61 La posición en función del tiempo de un móvil que se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea viene dada por: $f(t) = 50 + 150\sqrt{t}$ siendo t la hora del día y $f(t)$, su distancia al origen.

¿Cuándo va más rápido el móvil, entre las 2 h y las 4 h o entre las 7 h y las 11 h?

62 **Calcula** la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 8x^9$

b. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^5}}$

d. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 10$

e. $f(x) = \cos e^x$

f. $f(x) = 4x^3 - \ln x$

g. $f(x) = (5x^6 - 3x^2) \cdot (7x^6 - 3x^2)$

h. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7x^2 - 8x + 9}{\cos x}$

i. $f(x) = \dfrac{4x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x}$

63 **Aplica** la regla de la cadena para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = (2x^2 - 4x + 3)^3$

b. $f(x) = \ln(\cos x)$

c. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 6x}$

d. $f(x) = e^{x3+2x}$

e. $f(x) = \sqrt{e^x}$

f. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$

g. $f(x) = \cos(\ln x)$

h. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

64 **Aplica** la regla de la cadena para derivar las siguientes funciones:

a. $f(x) = (2x^4 - 3x^2 - 7x + 3)$

b. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 5)$

c. $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

d. $f(x) = \cos^2(x^3 + 2x^2)$

65 **Indica** si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en los puntos de abscisa 3, 5, 7 y 9.

a. $f(x) = 2x + 5$

b. $g(x) = x^2 - 3x + 5$

c. $h(x) = \dfrac{3}{x-1}$

66 El número de alumnos de un centro escolar afectados por la gripe a lo largo de un mes viene dado por la función $f(x) = 800 - x^2$. La variable x indica los días del mes y $f(x)$, el número de alumnos afectados.

a. **Calcula** la tasa de variación media correspondiente a los intervalos $[3, 5]$, $[13, 15]$ y $[10, 20]$.

b. ¿En cuál de estos intervalos ha disminuido más rápidamente el número de alumnos enfermos?

67 **Calcula** la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en el punto de abscisa $x = -1$.

68 **Calcula** la derivada de las siguientes funciones en los puntos de abscisa indicados:

a. $f(x) = 3x - 5$, en $x = 4$

b. $h(x) = x^2 + 5x - 3$, en $x = 3$

69 **Determina** los puntos de la curva de ecuación $f(x) = x^3 - 12x$ en los que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

—**Averigua** los valores de x para los que la función aumenten.

70 **Determina** los puntos en los cuales la tangente a la función dada sea horizontal:

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 10$

71 **Calcula** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a. $f(x) = x^3 + 2x + 10$, en el punto de abscisa $x = -2$.

b. $f(x) = ex$, en el punto de abscisa $x = 0$.

c. $f(x) = \ln x$, en el punto en que la gráfica corta al eje de abscisas.

72 **Calcula** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

—¿En qué punto la tangente es paralela al eje de abscisas?

73 **Deriva** las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$

b. $f(x) = \ln(\cos\sqrt{x})$

c. $f(x) = a^{\text{tg}x}$

d. $f(x) = \cos(x)^2$

e. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\text{sen } x}{x}\right)$

f. $f(x) = \text{sen}(\ln x)$

74 **Calcula** las siguientes derivadas y **comprueba** el resultado utilizando el programa *Derive*:

a. $f(x) = (2x^4 - 4x^2 + 3)^5$

b. $f(x) = \ln(\cos(\text{sen } x))$

c. $f(x) = \ln(\arccos^2 x)$

d. $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{3x^4 - 2}$

e. $f(x) = \dfrac{\cos x^3 + \text{sen } x^2}{e^x}$

f. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$

g. $f(x) = e^{\cos(3x)}$

h. $f(x) = \sqrt{\text{tg } x}$

i. $f(x) = \text{tg}\sqrt{2x}$

j. $f(x) = \text{sen}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

k. $f(x) = \dfrac{\text{tg } x}{\sqrt{x}}$

l. $f(x) = f(x) = \sqrt{7^{(1+x^3)}}$

75 **Halla** la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 80$

b. $f(x) = e^x$

c. $f(x) = \ln x$

d. $f(x) = \text{sen } x$

e. $f(x) = \cos x$

f. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

g. $f(x) = \cos(2x)$

h. $f(x) = 3x^4 + 70x$

i. $f(x) = \sqrt{(2x^3)}$

j. $f(x) = 40x^3 + 2x^2$

76 **Determina** los intervalos de monotonía de las siguientes funciones y los máximos y mínimos:

a. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

b. $f(x) = \text{sen}(2x), x \in [0, p]$

c. $f(x) = e^{x^2} - 1$

d. $f(x) = (x-2)^3$

e. $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$

f. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

77 **Determina** la ecuación de la recta tangente y la recta normal a las siguientes funciones en el punto indicado:

a. $f(x) = 2x$ para $x = 1$

b. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ para $x = 3$

c. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ para $x = -1$

d. $f(x) = \ln x$ para $x = 1$

e. $f(x) = \cos x$ para $x = p$

78 A un tanque que tiene la forma de un cono circular recto invertido de 4 m de radio y 16 m de altura entra agua a una razón de 50 cm^3/seg.

¿A qué velocidad está subiendo el nivel del agua cuando este se encuentra a 4 m. de altura?

¿A qué velocidad está cambiando el radio en ese mismo instante?

79 Un fabricante de bolígrafos sabe que el coste de producción de x bolígrafos en una semana es de $C(x) = 180 + 10x + x^2$. Si vende cada bolígrafo a 100 centavos:

a. **Expresa** el beneficio que obtiene por la venta de x bolígrafos en una semana (beneficios = ingresos menos costes);

b. **Calcula** cuántos debe vender para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

80 El rendimiento r en porcentaje de un alumno en un exámen de una hora viene dado por: $r(t) = 300\,t\,(1 - t)$, donde $0 \leq t \leq 1$ es el tiempo en horas. **Halla**:

a. ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?

b. ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

c. ¿Cuándo se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

81 **Analiza** si las funciones siguientes son continuas o no en 2; si no lo es, explique por qué.

a. $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$

b. $f(x) = \dfrac{8}{x - 2}$

c. $g(x) = \dfrac{3x^2}{x - 2}$

d. $g(x) = \sqrt{x - 1}$

e. $h(x) = \sqrt{x - 3}$

f. $h(x) = |3 - 5x^2|$

g. $h(t) = \dfrac{t^3 - 8}{t - 2}$

h. $h(t) = \dfrac{4t - 8}{t - 2}$

82 **Halla** la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, que es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

83 **Escribe** la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$ en el punto de corte con el eje de las abscisas

84 Dada la función: $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$

a. **Halla** sus máximos y mínimos y analiza su crecimiento.

85 **Escribe** las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 10x + 2$.

86 Dada la función $g(x) = (x - 2)^2 (x + 1)$, **determina** su monotonía y los puntos máximos y mínimos

87 En un invernadero de rosas, se tiene en cuenta la temperatura y para ello se utiliza la expresión:

$P(t) = (t + 1)^2 (32 - t)$, donde $P(t)$ es la producción y se expresa en kg y t es la temperatura, expresada en °C.

http://goo.gl/fhApnz

a. **Calcula** razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.

b. ¿Qué producción de rosas se obtendría a esta temperatura?

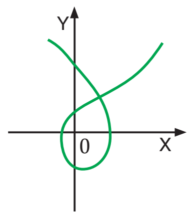
88 Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.

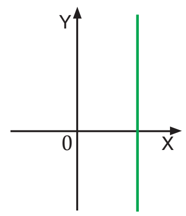
a. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?

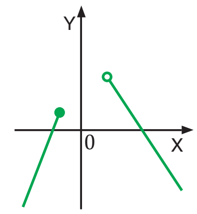
b. ¿Cuál será esa producción

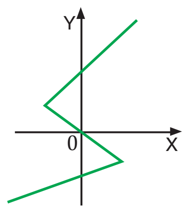
Un alto en el camino

1. La gráfica que corresponde a una función es la:

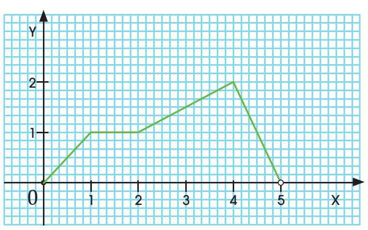
a. 

b. 

c. 

d. 

2. **Considera** la función f representada en la figura e indica cuál de estas afirmaciones es correcta:



a. La función f es estrictamente creciente en el intervalo $(1, 2)$.
b. El período fundamental de la función f es 5.
c. La función f presenta un máximo absoluto en $x = 4$.

3. La combinación $(g \text{ o } f)(x)$ Dadas las funciones $f(x) = \text{sen } x+1$ y $g(x) = \sqrt{(x+3)}$ es:

a. $\sqrt{(\text{sen } x+4)}$ b. $\sqrt{(\text{sen } x+3)}$ c. $\text{sen } \sqrt{(x+3)} +1$

4. La tasa de variación media de la función $f(x) = 4x^2 - 2x + 18$ en el intervalo $[1, 4]$ es:

a. 1 b. 18 c. 4

5. ¿Cuál es la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^4 - 5$ en el intervalo $[1, 2]$?

a. 30 b. 24 c. −30

6. **Analice** la monotonía de la siguiente función $x^2 - 3x + 2$; indique los intervalos donde la función es creciente o decreciente:

a. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ b. $(1{,}5, +\infty)$; $(-\infty, 1{,}5)$ c. $(-\infty, +\infty)$;

7. La derivada de la función $f(x) = x^4 - 4x + 1$ es:

a. $3x^4-4$ b. $4x-4$ c. $4x^3-4$

8 **Considera** la función $F = 4/\,d^2$:

a. **Indica** el dominio y el recorrido de la función.

b. **Representa** la función.

9 **Encuentre** la ecuación de una parábola que corta al eje de abscisas en $x = 3$ y en $x = 9$, y al eje de ordenadas en $y = 10$.

10 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = \sqrt{(x-2)}$ y $g(x) = x^2+4x+5$

a. **Calcula** el valor de las funciones para $x = 2$ y para $x = 4$.

b. **Efectúa** el estudio de las dos funciones.

c. **Representa** las dos funciones.

d. **Calcula** $(g \circ f)(x)$

11 **Estudia** la continuidad y la derivabilidad de la si-guiente función, definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ x^3+2x-1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

12 Si $f(x) = x + 2$ y $g(x) = \dfrac{x}{x^2-8}$, **halla** para x = 4:

a. $g(x) - f(x)$

b. $f(x) \circ g(x)$

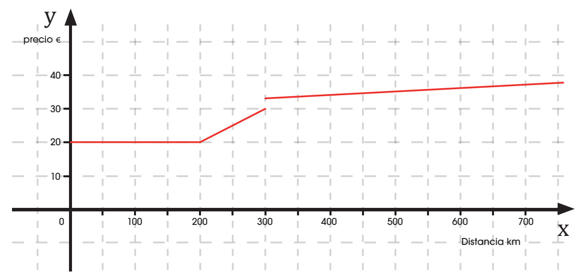
c. $(f \circ g)(x)$

d. $(g \circ f)(x)$

13 La tarifa que pagamos por el alquiler de un auto depende de un fijo y de la distancia recorrida, y viene dada por la siguiente función representada:

a. **Estudia** la continuidad de la función.

b. ¿Tendría sentido una discontinuidad inevitable? Razona tu respuesta.



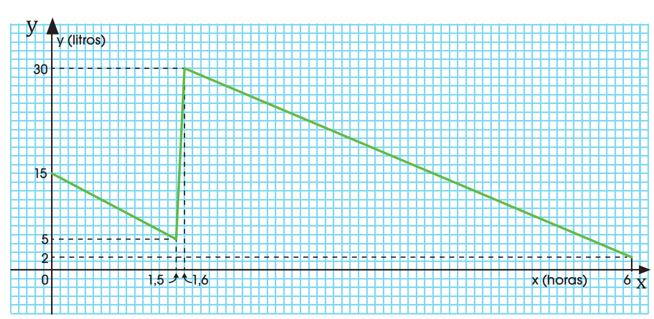
14 **Calcula** los límites de las siguientes sucesiones:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6-4n^2}{2n^2}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+3n-2}{2n^3-4n}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3-4n}{4n}$

15 En la figura se representa gráficamente la función f, que relaciona el volumen, y, de gasolina en el depósito de una motocicleta, con el tiempo, x, durante la celebración de las 6 horas de resistencia de Motoronia



a. **Estudia** los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b. **Interpreta** qué ocurre en cada intervalo.

4 Vectores

CONTENIDOS:

https://goo.gl/0sJMdz

Noticia:

Los límites, su estudio y su relación con las ciencias y la filosofía son temas que se abordan en numerosas publicaciones, como por ejemplo:

- John D. Barrow. *Imposibilidad: los límites de la ciencia y la ciencia de los límites*. Gedisa, 1999.
- Martin Bojowald. *Antes del big bang*. Debate, 2011.

Web:

En esta página de Internet encontrarás las aplicaciones de vectores en aspectos diarios. http://www.eduteka.org/proyectos.php/1/6039, y en este link puedes profundizar en las magnitudes vectoriales: https://www.youtube.com/watch?v=u3U5R8KtwIc

EN CONTEXTO:

Existen magnitudes, como la masa y el tiempo, que quedan definidas con una cantidad y una unidad.

Son algunas magnitudes escalares.

En cambio, para definir otras magnitudes, como las fuerzas, necesitamos además una dirección y un sentido.

A estas magnitudes las denominamos vectoriales.

Busca información y **cita** otras tres magnitudes vectoriales.

1. VECTORES

Existen magnitudes, como la masa, la longitud o la temperatura, que quedan totalmente determinadas a partir de un número real (o escalar) y una unidad de medida. Decimos que son magnitudes escalares.

Sin embargo, hay magnitudes como la fuerza o la velocidad que para determinar las completamente han de indicarse su módulo, su sentido y su dirección. A estas magnitudes las llamamos magnitudes vectoriales.

Las magnitudes vectoriales se representan mediante vectores.

Los vectores son muy importantes para estudiar fenómenos que suceden a nuestro alrededor. Con ellos podemos explicar, por ejemplo: ¿Por qué si elevamos una cometa cuando el viento está soplando en contra, y empezamos a correr para mantenerla en el aire, esta retrocede al punto en que la cuerda con la que la sostenemos, queda inclinada hacia atrás?

Para casos como este. Usamos los vectores para representar la velocidad que lleva la cometa y la velocidad del viento. Lo importante es ubicar los vectores en la dirección en la que se mueve cada uno, así:

Y TAMBIÉN:

Un segmento es un fragmento de recta limitado por dos puntos. A un segmento podemos asociarle una dirección, la de la recta que lo contiene, y una longitud, la distancia entre sus extremos.

Sin embargo, no podemos asociarle un sentido: los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ son el mismo segmento.

Para nombrar un segmento que une los puntos A y B, escribimos las dos letras que lo determinan y encima una barra: $\overline{AB}$.

Para nombrar un vector que une los puntos A y B, escribimos las dos letras que lo determinan y encima una flecha: $\overrightarrow{AB}$!!!".

1.1. Vectores fijos

Por dos puntos del plano, A y B, no coincidentes, pasa una única recta sobre la que se puede definir un segmento con origen y extremo en estos puntos.

> Dados dos puntos A y B del plano, denominamos vector fijo de origen A y extremo B al par ordenado (A, B).
> Lo representamos por $\overrightarrow{AB}$.

Así, todos los vectores fijos tienen un módulo, una dirección y un sentido.

El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento que lo determina. Lo representamos por $|AB|$ y es siempre un valor positivo.

La dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta determinada por A y por B.

El sentido del vector $\overrightarrow{AB}$ se define sobre la recta y va del origen del vector (punto A) al extremo (punto B).

1.2. Vectores equipolentes

Observa la figura. Dados un módulo, una dirección y un sentido, es posible determinar un vector tomando como origen cualquier punto del plano. Obtenemos así vectores equipolentes.

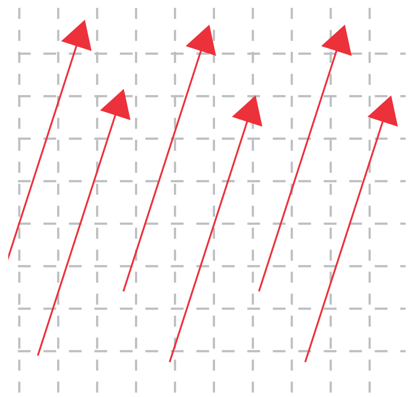


figura 1

Dos o más vectores fijos son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Y TAMBIÉN: ¿?

Dos vectores paralelos tienen la misma dirección.

Dos vectores pueden tener la misma dirección, pero distinto sentido $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

Si el origen y el extremo de un vector coinciden, el vector es nulo.

Ejemplo 1

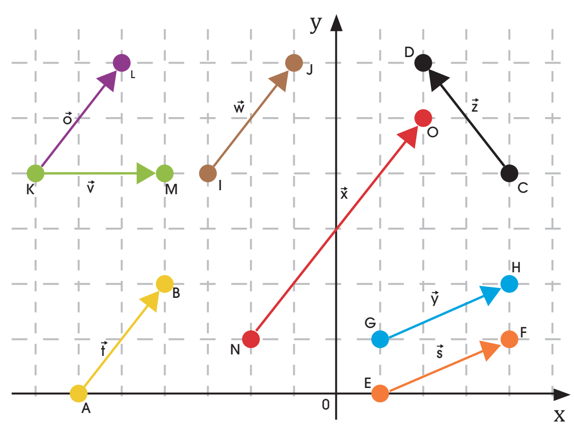
Indiquemos cuáles de estos vectores tienen el mismo módulo, cuáles tienen el mismo sentido y cuáles son equipolentes.

Resolución:

Los vectores $\vec{KL}, \vec{IJ}, \vec{AB}, \vec{NO}$ tienen el mismo sentido.

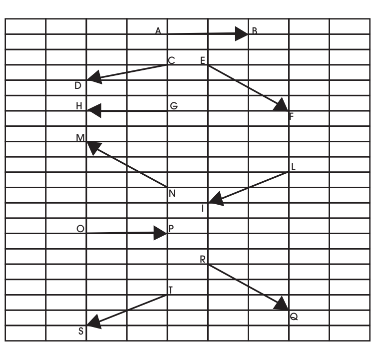
Los vectores KL, AB, KM, IJ tienen el mismo módulo.

La pareja de vectores IJ, AB y los vectores KL, GH, EF tienen el mismo módulo, el mismo sentido y la misma dirección.



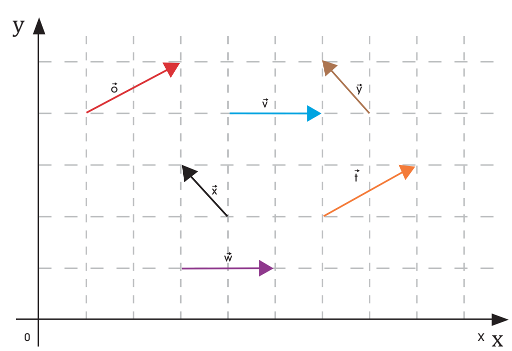
Actividades

1. **Indica** el origen y el extremo de cada uno de los vectores representados en la figura y **agrúpalos** en conjuntos de vectores equipolentes y en conjuntos de vectores con el mismo módulo.



2. **Dibuja** dos vectores que sean equipolentes.

3. En la figura de abajo **indica** qué vectores son equipolentes:

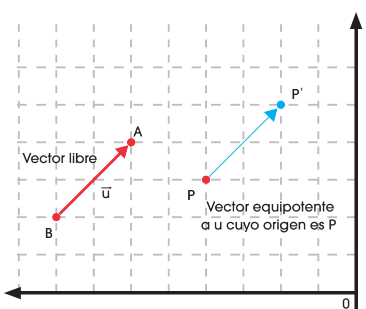


1.3. Vectores libres

Un ejemplo de un vector fijo podría ser la fuerza que aplicamos sobre un punto determinado de una mesa.

No obstante, ten en cuenta que para definir dicha fuerza no necesitamos saber el punto exacto sobre el que la aplicamos, sino que tenemos suficiente con conocer su dirección, su sentido y su módulo.

Y TAMBIÉN: ¿?



Existe una propiedad matemática denominada propiedad fundamental de los vectores libres:

Dado un punto P del plano cartesiano y un vector libre cualquiera $\vec{u}$, existe un único representante de $\vec{u}$ que tiene el origen en el punto P.

TIC

En el siguiente enlace, encontrarás más información acerca de los vectores fijos y los vectores libres:

http://goo.gl/OxlvC9

¿Cómo se demuestra la equipolencia de dos vectores? ¿Es siempre posible esta demostración?

Y TAMBIÉN: ¿?

A el conjunto de todos los vectores libres del plano lo denominamos V2.

La relación de equipolencia nos permite clasificar el conjunto de vectores fijos del plano en colecciones de vectores que, desde el punto de vista matemático, se comportan como uno solo. Estas colecciones son los vectores libres.

Un vector libre es el conjunto formado por todos los vectores fijos equipolentes a uno dado.

Cada uno de los vectores fijos que componen un vector libre es un representante de este vector.

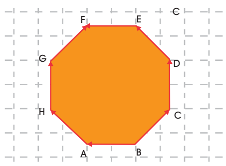
A los vectores libres los representamos mediante letras minúsculas ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$...) o encerrando entre corchetes uno de los vectores fijos que lo componen.

Así, el vector $[\overrightarrow{AB}]$ representa el vector libre formado por todos los vectores equipolentes a $\overrightarrow{AB}$.

Módulo, dirección y sentido de un vector libre

Los vectores fijos que determinan un vector libre, al ser equipolentes entre sí, tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

El módulo, la dirección y el sentido de un vector libre son el módulo, la dirección y el sentido de cualquiera de sus representantes



Ejemplo 2

Observa detenidamente este octágono y anota todos los vectores fijos que ves representados. A continuación:

a. Agrupar los vectores anteriores en conjuntos de vectores equipolentes.

b. Indicar cuántos vectores libres hay representados.

Comprensión: Deberemos analizar la dirección y el sentido de los vectores fijos para determinar cuáles son equipolentes entre sí y, por lo tanto, poder indicar cuántos vectores libres hay representados.

Resolución: Los vectores fijos representados son $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{AH}$.

a. Son equipolentes: $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{GF}$; $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{HG}$; $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{AH}$..

b. Los vectores libres representados son $[(\overrightarrow{BA})]$, $[(\overrightarrow{BC})]$, $[(\overrightarrow{CD})]$,$[(\overrightarrow{DE})]$.

1.4. Operaciones con vectores

Producto de un número real por un vector y suma

Observa cómo podemos efectuar operaciones con vectores gráficamente, utilizando el concepto de representante de un vector libre.

Producto de un número real por un vector

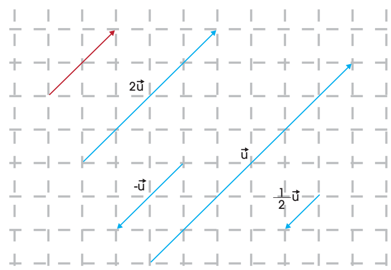
Llamamos producto de un número real k por un vector $\vec{u}$ y lo representamos por $k \cdot \vec{u}$ al vector libre que tiene:

-**Dirección**: La misma dirección que el vector $\vec{u}$.

-**Módulo**: El módulo de $\vec{u}$ multiplicado por el valor absoluto de k.

-**Sentido**: El mismo que $\vec{u}$ si k es positivo, y contrario a $\vec{u}$ si k es negativo.

■ figura 2

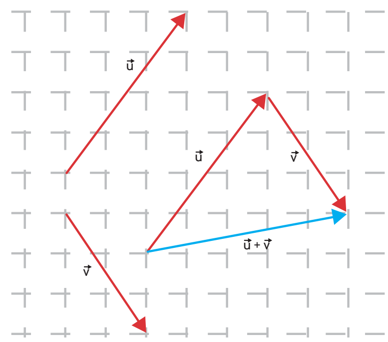


Suma de vectores

Llamamos suma de los vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y la representamos por $\vec{u} + \vec{v}$, al vector libre que obtenemos con el siguiente procedimiento:

- Elegimos dos representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de modo que el extremo del primer vector coincida con el origen del segundo.
- Trazamos el vector cuyo origen es el origen del representante del primer vector y el extremo es el extremo del representante del segundo vector.

■ figura 3



Ejemplo 3

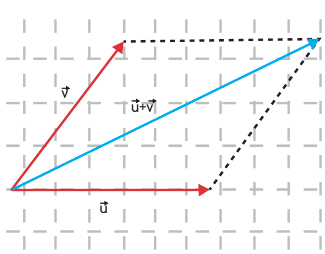
Dibujemos dos vectores cual quiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y representemos los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, y $3 \cdot \vec{v}$.

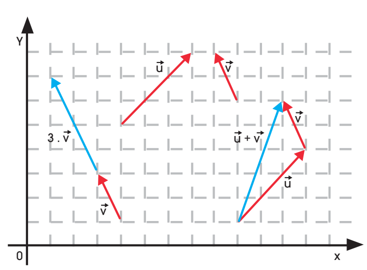
Resolución:

Dibujamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, cual quiera en el plano.
Para sumarlos, situamos el vector v, de modo que su origen coincida con el extremo del vector $\vec{u}$. Al unir el origen de $\vec{u}$ y el extremo de $\vec{v}$, obtenemos el vector suma.
Para dibujar el vector $3 \cdot \vec{v}$, alargamos el vector $\vec{v}$, hasta que mida el triple.

Comprobación:

Podemos comprobar que las representaciones son correctas en un programa de representaciones gráficas, como GeoGebra.





Y TAMBIÉN: ¿?

Propiedades del producto de un número real por un vector

$\forall\, k, k' \in \mathbb{R}$, se cumple:

Propiedad asociativa:
$k \cdot (k' \cdot \vec{u}) = (k \cdot k') \cdot \vec{u}$

Propiedad distributiva respecto de la suma de vectores:
$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$

Propiedad distributiva respecto de la suma de escalares:
$(k + k') \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + k' \cdot \vec{u}$

Elemento neutro:
$1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot 1 = \vec{u}$

Propiedades de la suma de vectores

Conmutativa:
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Asociativa:
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Elemento neutro: 0
$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

Elemento opuesto: $-\vec{u}$
$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

Resta y combinación lineal de vectores

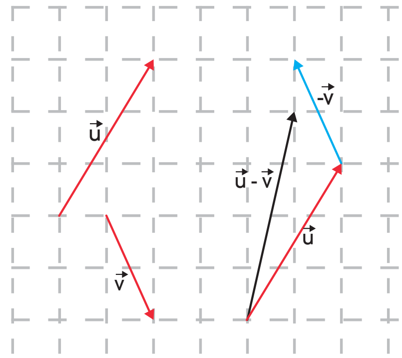


figura 4

Para restar dos vectores, usamos el concepto de elemento opuesto de la suma. Por ello, dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener $\vec{u} - \vec{v}$, basta con construir el vector $-\vec{v}$, y sumarlo al vector $\vec{u}$. Así, $\vec{u} - \vec{v}\,, = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Observa que obtenemos el mismo resultado si utilizamos el procedimiento aplicado en la suma o si aplicamos la regla del paralelogramo.

Combinación lineal de vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con distinta dirección, podemos obtener otro vector $\vec{w}$, combinando las operaciones suma y multiplicación por un número real:

$\vec{w} = -\alpha\,\vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ donde α y β son números reales cual quiera.

Decimos que el vector $\vec{w}$, es combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$.

Así, por ejemplo, el vector $\vec{w} = 3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Observa que el vector $\vec{0}$, es una combinación lineal de cualquier par de vectores, pues: $\vec{0} = 0\,\vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$.

Expresión de un vector como combinación lineal de otros dos

Dados dos vectores u y v, con distinta dirección, a cualquier otro vector del plano w podemos expresar como combinación lineal de u y v.

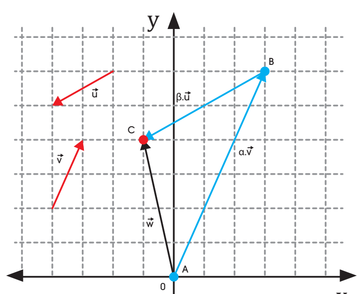


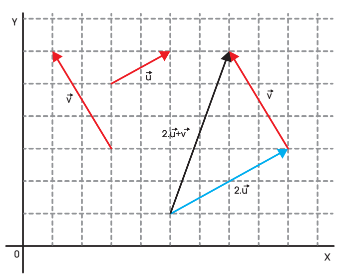
figura 5

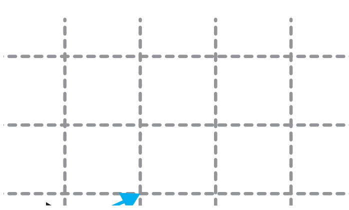
Ejemplo 4

Dibujemos dos vectores cual quiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y representemos el vector $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

Comprensión:

Dibujemos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, cual quiera en el plano. Primero, dibujemos $2 \cdot \vec{u}$, después desplazemos el vector $\vec{v}$, hasta el extremo de $2 \cdot \vec{u}$. Unamos el origen de $2 \cdot \vec{u}$ con el extremo de $\vec{v}$ y obtenemos el vector $2 \cdot \vec{u} + \vec{v}$.





Y TAMBIÉN: ¿?

Es posible escribir combinaciones lineales de tantos vectores como se quiera. Así:

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + ... + k_n \cdot \vec{u}_n$$

con k_1, k_2, ..., kn números reales cualesquiera, es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ...,$

Dos vectores son linealmente independientes si la relación:

$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = 0$

solamente se cumple si a y b son ambos iguales a 0.

Gráficamente, en el plano, la condición necesaria para que dos vectores sean linealmente independientes es que tengan distinta dirección.

En caso contrario, decimos que son linealmente dependientes que, en el plano, es lo mismo que decir que tienen la misma dirección.

Actividades

4. Dados estos vectores libres, **representa**:

   a. $2 \cdot \vec{u} + \vec{v}$.

   b. $3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$

1.5. Bases de V_2

Hemos visto que dados dos vectores no nulos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con distinta dirección y cualquier otro vector $\vec{w}$, podemos encontrar siempre dos números reales a y b de modo que $\vec{w} = \alpha . \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, forman una base de V_2.

Decimos que $B = \{\vec{u}; \vec{v}\}$ forma una base de V_2 si $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tienen direcciones diferentes y cualquier vector $\vec{w}$ puede expresarse como: $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$. Los números reales α y β son componentes de $\vec{w}$ en B.

Así, si $\vec{w} = 3 \cdot \vec{u} + 4 \cdot \vec{v}$, las componentes de $\vec{w}$ en la base formada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, son $(3, 4)$ y escribiremos: $\vec{w} = (3, 4)$.

Si los dos vectores de la base son perpendiculares, es decir, forman un ángulo de 90°, diremos que constituyen una base ortogonal.

Si, además de perpendiculares, los dos vectores de la base son vectores unitarios (esto es, tienen módulo 1), diremos que forman una base ortonormal.

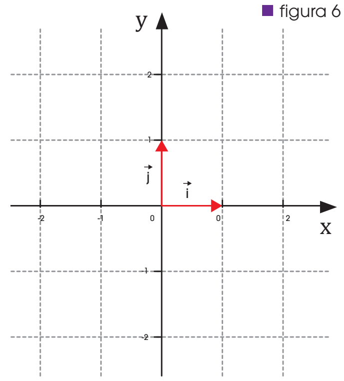
Base canónica

Las componentes de los vectores no son únicas, pues dependerán de la base que utilicemos para definirlos.

Por ello, se define una base ortonormal, llamada base canónica, que facilitará la identificación de las componentes de los vectores.

La base canónica está formada por dos vectores que denotaremos como: $\vec{i} = (1, 0)$ y: $\vec{j} = (0,1)$ determinados por los respectivos puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ del plano cartesiano.

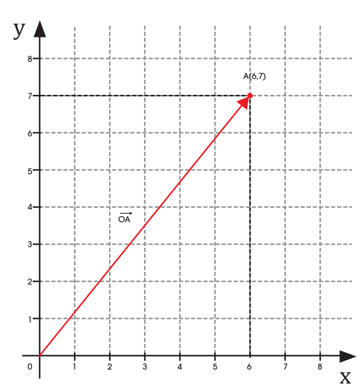
■ figura 6



Fíjate en que, en esta base, si escogemos como representante de cualquier vector libre el que tiene origen en el punto $(0, 0)$, las coordenadas del extremo coinciden con las componentes del vector.

Así, si, por ejemplo, consideramos el vector determinado por el origen de coordenadas $(0, 0)$ y el punto $A = (6, 7)$ del plano, vemos que: $\vec{OA} = 6\,\vec{i} + 7\,\vec{j}$. Por lo tanto, las componentes del vector en esta base son $(6, 7)$; es decir, coinciden con las coordenadas del punto A.

■ figura 7

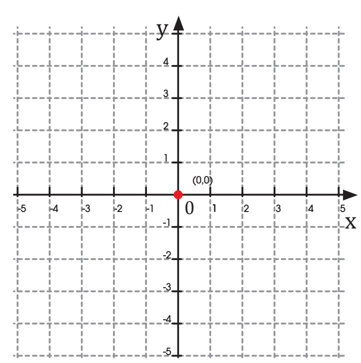


Y TAMBIÉN: ¿?

Desde el punto de vista matemático, definamos la base de un espacio vectorial de cualquier dimensión como un conjunto de vectores de dicho espacio que cumplen estos requisitos: a. Son linealmente independientes. b. Cualquier vector puede expresarse como una combinación lineal de dichos vectores.

En el plano, hemos visto que una base está formada por cualquier par de vectores que tengan diferente dirección; es decir, que sean linealmente independientes.

El plano cartesiano queda determinado por dos ejes de coordenadas: uno vertical (Y) y otro horizontal (X) que se cortan en el origen de coordenadas, el punto $(0, 0)$.



1.6. Dependencia de vectores

Si observamos los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, veremos que podemos escribir el vector w como $2\vec{u} + 3\vec{v}$. Este tipo de expresión recibe el nombre de combinación lineal de los vectores libres $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. A los números que en la combinación lineal multiplican a los vectores los denominamos coeficientes de la combinación lineal.

Cuando tenemos un conjunto de vectores, podemos preguntarnos si es o no posible escribir uno de ellos como combinación lineal de los demás. Según sea la respuesta, el conjunto de vectores será linealmente dependiente o linealmente independiente.

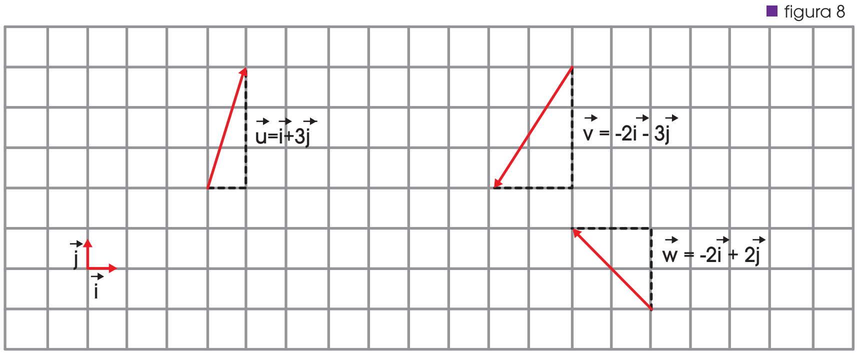
Un conjunto de vectores es linealmente independiente si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás.

Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si alguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás.

En el plano, dos vectores libres no nulos de diferente dirección son linealmente independientes y tres vectores son siempre linealmente dependientes.

Observa, ahora, los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Son linealmente independientes, puesto que son dos vectores del plano con distinta dirección. Además, a cualquier otro vector del plano puede obtener como combinación lineal de ellos.

figura 8



Decimos que el conjunto de vectores $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ es una base del plano, o una base V_2.

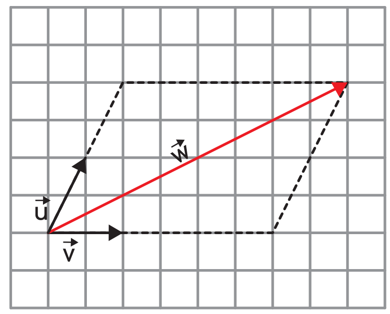
Un conjunto de vectores es base si son linealmente independientes y cualquier otro vector puede expresarse como una combinación lineal de los vectores del conjunto.

En el plano, dos vectores de distinta dirección constituyen una base.

Y TAMBIÉN: ¿?

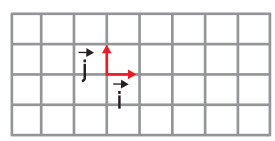
Combinación lineal

Cualquier expresión del tipo $k^1 \cdot \vec{u} + k_2 - \vec{v}$ en la que k_1 y k_2 son dos números reales cualesquiera, recibe el nombre de combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Los números k_1 y k_2 son los coeficientes de la combinación lineal.



Y TAMBIÉN: ¿?

Con el objetivo de facilitar los cálculos, suelen considerarse bases en las que los vectores son perpendiculares y de módulo 1. Las denominamos bases ortonormales.



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$

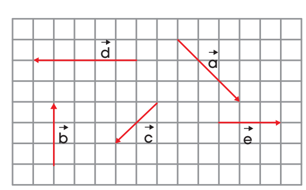
Actividades

5. **Indica** si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:

   a. {a ,b ,c} c) {a ,b }

   b. {b, d, e} d) {d, e}

   —¿Cuál de los conjuntos es base V2?



1.7. Componentes de un vector en una base

Observa en la figura que la combinación lineal de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ con la que se obtiene el vector $\vec{a}$ es $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

Los coeficientes (2, 3) son las *componentes* del vector $\vec{a}$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Las componentes de un vector en una determinada base son los coeficientes de la combinación lineal de la base a partir de la cual obtenemos dicho vector.

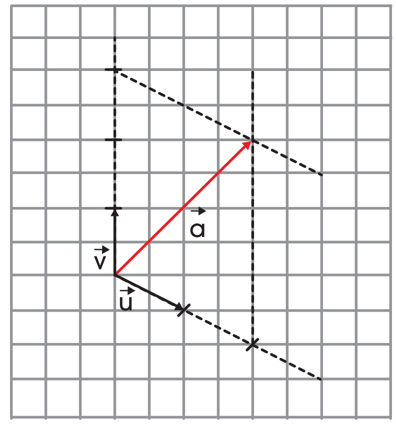


figura 9

Veamos el proceso que debemos seguir para determinar gráficamente las componentes del vector a en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.

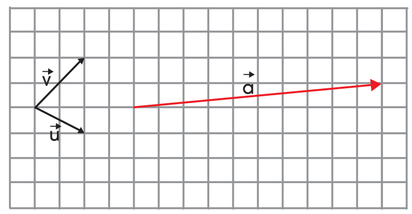
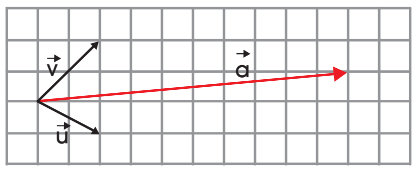


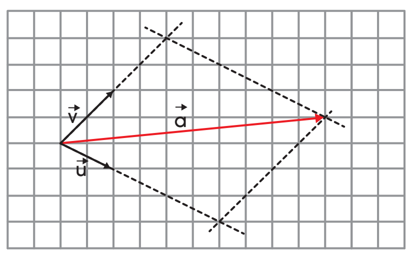
figura 10

Obtención gráfica de las componentes de un vector en una base

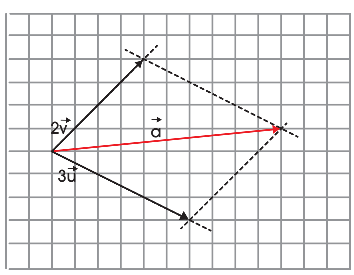
Dibujamos un representante de cada uno de los tres vectores con un origen común.



Trazamos paralelas a los vectores de la base que pasen por el origen y por el extremo del vector $\vec{a}$. De este modo, se nos habrá formado un paralelogramo.



Asociamos cada uno de los lados del cuadrilátero al producto de un vector de la base multiplicado por un número.
Según la regla del paralelogramo, la suma de estos vectores será igual al vector $\vec{a}$.



Como $a = 3\vec{u} + 2\vec{v}$, las componentes de $\vec{a}$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ son $(3, 2)$.

Tabla 1

TIC

Si accedes a la página:

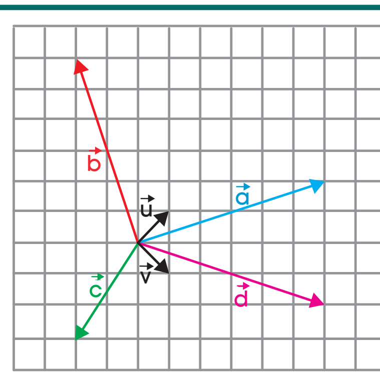
http://goo.gl/xYA1m9

podrás dibujar vectores (eligiendo dirección, sentido y módulo) y observarás cuáles son sus componentes en dos bases diferentes.

Actividades

6. **Indica** las componentes de los vectores de la figura en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.

   —**Representa** los vectores e y f cuyas componentes en la base B son $(-2, 2)$ y $(4, -3)$, respectivamente



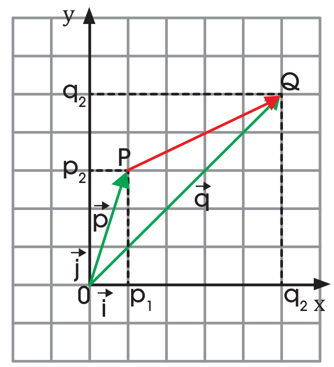


figura 11

1.8. Componentes de un vector determinado por dos puntos

Consideremos el sistema de referencia $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ y los puntos P y Q. Veamos cómo determinar las componentes del vector $[PQ]$ en dicho sistema de referencia a partir de las coordenadas de P y de Q.

Observa la figura de la derecha.

$$[\overrightarrow{OQ}] = [\overrightarrow{OP}] + [\overrightarrow{PQ}]$$

$$[\overrightarrow{PQ}] = [\overrightarrow{OP}] - [\overrightarrow{OQ}]$$

Si las coordenadas de P son (p_1, p_2) y las coordenadas de Q son (q_1, q_2), se tiene:

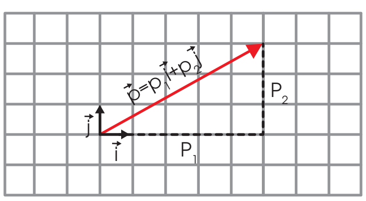
$$[\overrightarrow{PQ}] = (q_1\vec{i} + q_2\vec{j}) - (p_1\vec{i} + p_2\vec{j})$$

$$[\overrightarrow{PQ}] = (q_1 - p_1)\vec{i} + (q_2 - p_2)\vec{j}$$

Las componentes del vector $[(\overrightarrow{PQ})]$ se obtienen restando las coordenadas del origen de P de las del extremo de Q.

Y TAMBIÉN: ¿?

En la siguiente figura está representado el vector $\vec{p}$ en función de la base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}\}$



Para calcular su módulo, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$|\vec{p}| = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

Ejemplo 5

Sabiendo que las coordenadas de P y de Q respecto a un sistema de referencia son P (1,−3) y Q (2, 0), calculemos las componentes del vector $[\overrightarrow{PQ}]$

$$[PQ] = (2 - 1)\vec{i} + (0 - (-3))\vec{j} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

las componentes del vector $[\overrightarrow{PQ}]$ son (1,−3).

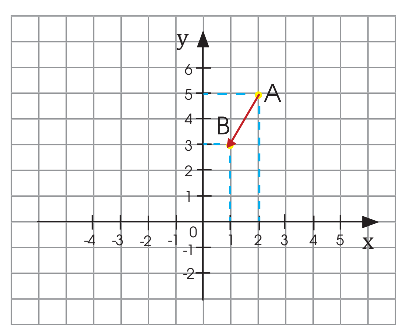
Ejemplo 6

Calcula las componentes del vector $\vec{v}$ que tiene origen en $A = (2, 5)$ y extremo en $B = (1, 3)$.

Comprensión: Las componentes del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ se obtienen restando las componentes de los puntos.

Resolución: $\overrightarrow{AB} = (2, 5) - (1, 3) = (2 - 1, 5 - 3) = (1, 2)$

Comprobación: Representemos gráficamente los puntos para comprobar que las componentes del vector calculadas son las correctas.



Actividades

7. Sabiendo que las coordenadas de los puntos A y B en un sistema de referencia son A (1, 2) y B (2, −1), **calcula** las componentes del vector $[(\overrightarrow{AB})]$.

—**Determina** la distancia entre A y B.

1.9. Operaciones con vectores expresados por sus componentes.

Multiplicación de un vector por un número real

Sabemos ya cómo operar con vectores gráficamente, veamos ahora cómo efectuar estas mismas operaciones mediante las componentes de los vectores.

Las componentes de $\vec{u}$ en la base $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ son $(3, 1)$, pero ¿qué componentes tendrá el vector $2 \cdot \vec{u}$?

Al representarlo gráficamente, puedes comprobar que el vector $2 \cdot \vec{u}$ tiene componentes $(6, 2)$, que es el resultado de multiplicar por 2 las componentes de $\vec{u}$.

En general, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ son las componentes de $\vec{u}$ en una cierta base, las componentes $k \cdot \vec{u}$ en esa misma base son:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

Ejemplo 7

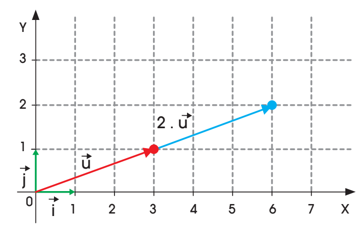
Dado el vector $\vec{v} = (3, 2)$, calculemos el valor de $\vec{w} = -7 \cdot \vec{v}$.

Comprensión: Multipliquemos las componentes del vector $\vec{v}$ por - 7.

Resolución: $\vec{w} = -7 \cdot \vec{v} = -7 \cdot (3, 2)$
$= (-7 \cdot 3, -7 \cdot 2) = (-21, -14)$

Y TAMBIÉN: ¿?

La expresión del opuesto del vector $\vec{v}$ de componentes (v^1,v^2) es el vector $-\vec{v}$ de componentes $(-v^1,-v^2)$.



Si trabajamos con coordenadas, también podemos demostrar las propiedades de las operaciones con vectores. Por ejemplo, la propiedad asociativa de la multiplicación de un vector por un número real se demostraría así:

$k \cdot (k' \cdot \vec{v}) = k \cdot (k' \cdot (v_1,v_2)$

$= k \cdot (k' \cdot v_1, k' \cdot v_2)$

$= (k \cdot k' \cdot v_1, k \cdot k' . v_2)$

$= k \cdot k' \cdot (v_1,v_2) = (k \cdot k') \cdot \vec{v}$

Ejemplo 8

Las componentes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}$ respecto de una cierta base son:

$\vec{u} = (5, 0)$, $\vec{v} = (2, 1)$ y $\vec{w} = (1, -2)$. Expresemos el vector $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Se trata de hallar dos números reales, k_1 y k_2, de manera que: $\vec{u} = k_1 \cdot \vec{v} + k_2 \cdot \vec{w}$

Sustituyamos las componentes correspondientes:

$$(5, 0) = k_1 \cdot (2, 1) + k_2 \cdot (1, -2) = (2k_1, k_1) + (k_2, -2k_2)$$
$$= (2k_1 + k_2, k_1 - 2k_2)$$

Finalmente, igualemos componentes y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5 = 2k_1 + k_2 \\ 0 = k_1 - 2k_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 5 = 2k_1 + k_2 \\ 0 = -2k_1 + 4k_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 5 = 5k_2 \\ k_2 = 1 \end{matrix}$$

Resolvamos el sistema y obtenemos: $k_1 = 2$ y $k_2 = 1$.

Por lo tanto: $\vec{u}$, $= 2\vec{v} + \vec{w}$.

Suma y resta de vectores

Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la base $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ son $(3, 1)$ y $(2, -2)$, respectivamente. Pero, ¿qué componentes tendrá el vector $\vec{u} + \vec{v}$?

Al representarlo gráficamente, puedes comprobar que el vector $\vec{u} + \vec{v}$ tiene componentes $(5, -1)$, que es el resultado de sumar las componentes de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$.

En general, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ son las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una cierta base, las componentes $\vec{u} + \vec{v}$ en esa misma base son:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Las componentes $u - v$ en esa misma base son:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

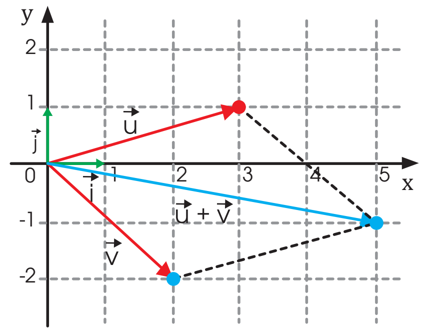


figura 12

Ejemplo 9

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 5)$, calculemos el valor del vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ y de $\vec{s} = \vec{u} - \vec{v}$.

Comprensión: Para calcular las componentes del vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, sumemos las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Para calcular las componentes del vector $\vec{s} = \vec{u} - \vec{v}$, sumemos las componentes de $\vec{u}$ y el vector opuesto de $\vec{v}$

Resolución: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (3 + (-2), 2 + 5) = (1, 7)$
El opuesto del vector v es $(-(-2), -5) = (2, -5)$
$\vec{s} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-v) = (3 + 2, 2 + (-5)) = (5, -3)$

Comprobación: Representemos gráficamente las operaciones para comprobar que los resultados obtenidos son correctos.

Ejemplo 10

Sabiendo que las componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una determinada base son $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (2, 2)$, hallemos las componentes de:

a. $\vec{u} + \vec{v}$ b. 3 c. $2\vec{u} - \vec{v}$

Procediendo del mismo modo, tenemos:

a. $\vec{u} + \vec{v} = (1, -2) + (2, 2) = (1 + 2, -2 + 2) = (3, 0)$

b. $3\vec{u} = 3 \cdot (1, -2) = (3, -6)$

c. $2\vec{u} - \vec{v} = 2 \cdot (1, -2) - (2, 2)$
$= (2, -4) - (2, 2) = (2 - 2, -4 - 2) = (0, -6)$

TIC

Para trabajar distintos aspectos del cálculo con vectores, puedes visitar la siguiente pagina: *interactive mathematics on the internet* correspondiente a *Vector Calculator.*

http://goo.gl/TdMZep

Actividades

8. Sabiendo que las componentes de los vectores u y v en una determinada base son $u = (1, 2)$ y $v = (2, -1)$, efectúa las siguientes operaciones:

a. $\vec{u} + \vec{v}$

b. $\vec{u} - \vec{v}$

c. $3\vec{u} - \vec{v}$

d. $\frac{1}{2} \vec{u} + \vec{v}$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar es una operación que asocia a cada par de vectores libres un número real o escalar. Lo definimos de la siguiente forma:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$ donde α es el ángulo menor que forman los dos vectores.

Interpretación geométrica

El producto escalar entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representa el producto del módulo de uno de ellos por el módulo de la proyección del otro sobre él.

Fíjate en la imagen. De la definición de coseno, obtenemos que $|\vec{v}| \cdot \cos \alpha$ es el módulo de la proyección de $|\vec{v}|$ sobre $\vec{u}$.

Por lo tanto, si α es agudo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

Teniendo en cuenta que $\cos (180 - a) = - \cos a$, de forma análoga podemos demostrar que si α es obtuso: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

Propiedades del producto escalar

- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores perpendiculares, su producto escalar es 0, y viceversa, puesto que $\cos 90° = 0$.

  En efecto, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 90º =$

  $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0 = 0$.

- El producto de un vector por él mismo es igual al cuadrado del módulo del vector.

  En efecto, el ángulo formado por un vector con él mismo es de $0°$ y el $\cos 0° = 1$; por tanto, $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0° = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

Expresión analítica en una base ortonormal

Consideramos u y v, dos vectores cuyas componentes en la base ortonormal.

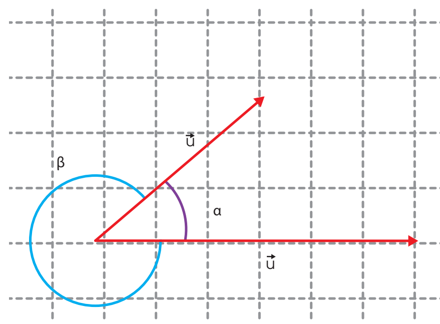
$B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ son (u_1, u_2) y (v_1, v_2); es decir, $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ y $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$.

Si utilizamoslas propiedades del producto escalar:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \cdot (v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) = u_1\vec{i} \cdot (v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) + u_2\vec{j} \cdot (v_1\vec{i} + v_2\vec{j})$
$= u_1v_1\vec{i} \cdot \vec{i} + u_1v_2\vec{i} \cdot \vec{j} + u_2v_1\vec{j} \cdot \vec{i} + u_2v_2\vec{j} \cdot \vec{j} = u_1v_1|\vec{i}|_2 + u_1v_2\vec{i} \cdot \vec{j} + u_2v_1\vec{j} \cdot \vec{i} + u_2v_2\,|\vec{j}|_2$

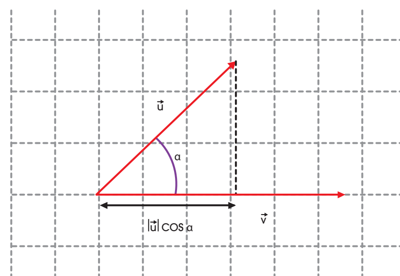
Como B es ortonormal, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ y $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$; es decir, $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$.

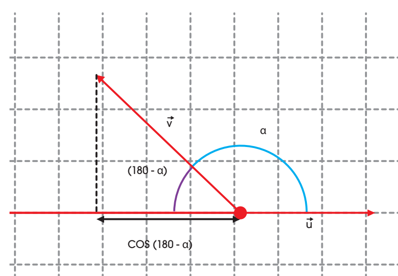
■ figura 13



Los vectores no ortogonales forman dos ángulos. Para calcular el proucto escalar, utilizamos el menor de ellos.

■ figura 14





■ figura 15

El valor del producto escalar de dos vectores del plano cartesiano puede ser negativo, nulo o positivo.

- Es positivo cuando el menor ángulo que forman los vectores es agudo.
- Es negativo cuando el menor ángulo que forman los vectores es obtuso.
- Es nulo cuando los vectores son ortogonales.

TIC

Para trabajar distintos aspectos del cálculo con vectores puedes visitar la siguiente página de *Interactive mathematics on the internet* corrspondiente a *Vector Calculator*

http://goo.gl/hJVlhp

Módulo de un vector y ángulo entre dos vectores

La expresión analítica del producto escalar en una base ortonormal permite obtener el módulo de un vector y el coseno del ángulo entre dos vectores en función de sus componentes.

Sean (u_1, u_2) y (v_1, v_2) las componentes de u y v en una base ortonormal. Entonces:

$$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{(u_1,u_2)\cdot(u_1,u_2)} \Rightarrow |\vec{u}| =\sqrt{u^2_1+u^2_2}.$$

Por otro lado:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|u|\cdot|v|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}.$$

Si ahora sustituimos $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ por su expresión analítica, obtenemos:

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u^2_1+u^2_2}\cdot\sqrt{u^2_1+v^2_2}}$$

que es la expresión analítica del ángulo entre dos vectores.

Y TAMBIÉN: ¿?

Los vectores ortogonales son aquellos cuyo producto escalar es 0 sin que ninguno de ellos sea nulo.

Si tenemos un vector con componentes (u_1, u_2), el vector $(u_2, -u1)$ es ortogonal al anterior. Y, por supuesto, también el vector $(-u_2, u_1)$.

Ejemplo 11

Las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una base ortonormal son $(1, 3)$ y $(-2, 5)$. Calculemos:

a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ b. $|\vec{u}|$ c. $|\vec{v}|$ d. $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Apliquemos en cada caso la expresión correspondiente.

a. $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2=1\cdot(-2)+3\cdot 5=2+15=13$

b. $|\vec{u}|= u^2_1+u^2_2=\sqrt{1^2+3^2} = 10$

c. $|\vec{v}|=\sqrt{v^2_1+v^2_2}=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29}$

d. $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|v| = \dfrac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u^2_1+u^2_2}\cdot\sqrt{v^2_1+v^2_2}} =$

$$= \frac{1\cdot(-2)+3\cdot 5}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+5^2}} = \frac{13}{\sqrt{290}}$$

Ejemplo 12

Hallemos un vector ortogonal a $\vec{u}=(3, 4)$ y de módulo 1.

Comprensión: Para hallar un vector ortogonal a u, debemos buscar un vector cuyo producto escalar por $\vec{u}$ sea cero. Una posibilidad es el vector $\vec{v}=(4,-3)$, ya que:

$$u\cdot\vec{v} = (3,4)\cdot(4,-3) = 3\cdot 4+4\cdot(-3) = 12-12 = 0$$

Resolución: Calculemos el módulo de $\vec{v}$:

$$|v|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

Si multiplicamos el vector $\vec{v}$ por, obtenemos otro vector $\frac{1}{\vec{v}}$ de la misma dirección y módulo la unidad. Por tanto, un vector ortogonal a $\vec{u}$, y de módulo 1 es:

$$\vec{v}=\left(\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right)$$

1.10. Ángulo entre dos vectores

A partir de la definición de producto escalar, podemos determinar el ángulo que forman dos vectores en el plano.

Definimos el ángulo formado por dos vectores del siguiente modo: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.

Ejemplo 13

Calculemos el ángulo formado por los vectores u y v cuyas componentes en la base canónica son:

$\vec{u} = (2, 7)$ y $\vec{v} = (-3, 5)$.

Comprensión: Apliquemos directamente la fórmula del ángulo entre dos vectores.

Resolución:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{2\cdot(-3) + 7\cdot 5}{\sqrt{2^2 + 7^2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + 5^2}} = \frac{-6 + 35}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{34}}$$

$$= \frac{29}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{34}} \quad \alpha = \arccos\frac{29}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{34}} = 46{,}91°$$

TIC

Puedes comprobar los resultados utilizando la calculadora que encontrarás en la página

http://goo.gl/Y73w1r

Ejemplo 14

Calcularemos los ángulos del triángulo de vértices: $A\ (6,0)$, $B\ (3,5)$, $C\ (-1,-1)$.

Comprensión: Calculemos primero las componentes de los vectores que forman los 3 lados del triángulo y luego hallemos los ángulos entre estos lados, aplicando la fórmula correspondiente.

Resolución:

$\overrightarrow{AB} = (-3,5)$ $\quad\overrightarrow{BA} = (3,-5)$ $\quad\overrightarrow{AC} = (-7,-1)$ $\quad\overrightarrow{CA} = (7,1)$ $\quad\overrightarrow{BC} = (-4,-6)$ $\quad\overrightarrow{CB} = (4,6)$

$$\cos\alpha\,\widehat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}$$

$$\cos\alpha\,\widehat{A} = \frac{(-3)\cdot(-7)+5\cdot(-1)}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2}\cdot\sqrt{(-7)^2 + (-1)^2}} = \frac{16}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{50}} = 0{,}388057 \qquad \widehat{A} = 67°\,17'$$

$$\cos\alpha\,\widehat{B} = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{BA}|}$$

$$\cos\alpha\,\widehat{B} = \frac{(-4)\cdot 3 + (-6)\cdot(-5)}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{34}} = \frac{16}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{50}} = 0{,}42809 \qquad \widehat{B} = 64°\,65'$$

$$\cos\alpha\,\widehat{C} = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|}$$

$$\cos\alpha\,\widehat{C} = \frac{34}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{52}} = 0{,}6668 \qquad \widehat{C} = 48°\,10'\,47''$$

1.11. Vector unitario

Un vector unitario es un vector cuyo módulo es igual a 1.

Dado el vector $\vec{u}$, al vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido lo calculamos dividiendo el vector entre su módulo: $\frac{1}{\vec{u}} \cdot \vec{u}$

Dado el vector $\vec{u}$, si queremos calcular un vector con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{u}$ pero con módulo k, calculemos el vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{u}$ y multiplicamos por k: $\frac{k}{\vec{u}} \cdot \vec{u}$.

Y TAMBIÉN: ¿?

El conjunto V_2 dotado de las operaciones de suma y de producto por un escalar que hemos definido, constituye lo que llamamos un espacio vectorial.

La dimensión de un espacio vectorial es el máximo número de vectores que puede tener una base.

En el caso de V_2 la dimensión es 2; es decir, no puede haber tres vectores linealmente independientes.

Ejemplo 15

Transformemos el vector $\vec{v} = (5, 12)$ en un vector unitario con el mismo sentido y la misma dirección.

Comprensión: Para convertir el vector en unitario, calculemos el módulo del vector y dividamos cada componente entre el módulo.

Resolución:

$$|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 =; \ \vec{u} = \left(\frac{v_1}{\vec{v}}, \frac{v_2}{\vec{v}}\right) = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$$

Comprobación:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{5^2 + 12^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = 1$$

Ejemplo 16

Las coordenadas del vector a son (3, 4) ¿cuáles son las coordenadas de un vector unitario con la misma dirección y sentido que a.

Comprensión: Para calcular las coordenadas de un vector unitario con la misma dirección y sentido al que nos proponen (recordamos lo que hemos dicho anteriormente), es la de dividir las coordenadas del vector dado entre el valor de su módulo:

Resolución: Calculemos el módulo de $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(3)2 + (4)2} = \sqrt{25} = 5$$

Ahora, dividimos las coordenadas de $\vec{a}$ que son (3, 4) entre el módulo que acabamos de calcular que es 5.

Las coordenadas del vector unitario con la misma dirección y sentido que será (llamamos le $\vec{u}$ al vector unitario):

$$\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Comprobación:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}, \frac{4}{5}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$

Actividades

9. **Transforma** el vector de componentes (8, 15) en un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido.

10. **Normaliza** los siguientes vectores, transfórmalos en vector unitario:

a. $(15, -8)$

b. $(3, -4)$

c. $(4, 0)$

d. $(2, -3)$

e. $(-4, 7)$

f. $(-5, -3$

1.12. Coordenadas de un punto en el plano

A continuación, sabremos cómo utilizar los vectores para asignar coordenadas a los puntos del plano.

Consideremos un punto fijo O del plano y una base $B = \{\vec{u}, (\vec{v})\}$ de V_2.

El conjunto formado por O y $B = \{\vec{u}, (\vec{v})\}$ constituye un sistema de referencia en el plano, pues permite determinar la posición de cualquier punto del plano. Lo denotaremos por $R = \{O, \vec{u}, \vec{v}\}$.

En efecto, cualquier otro punto P del plano determina con O un vector $\overrightarrow{OP}$. El vector libre $[\overrightarrow{OP}]$, que denotaremos por $\vec{p}$, lo denominamos vector posición del punto P.

Sean (p_1, p_2) las componentes de $\vec{p}$ en la base B. Diremos que (p_1, p_2) son las coordenadas del punto P en el sistema de referencia $R = \{O, \vec{u}, \vec{v}\}$ y escribiremos $P = (p_1, p_2)$.

Las coordenadas de un punto P respecto al sistema de referencia $R = \{O,\vec{u},\vec{v})\}$ son las componentes del vector posición de P en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Así, dado un sistema de referencia $R = \{O, \vec{u}, \vec{v}\}$, para asignar coordenadas a un punto P del plano procedemos del siguiente modo:

$$[OP] = \vec{p} = p_1\vec{u} + p_2\vec{v} \longrightarrow P = (p_1, p_2)$$

Recuerda, por ejemplo, que la base canónica y el origen de coordenadas forman un sistema de referencia en el que las coordenadas de un punto coinciden con sus coordenadas cartesianas.

A partir de ahora, utilizaremos sistemas de referencia cuya base sea ortonormal.

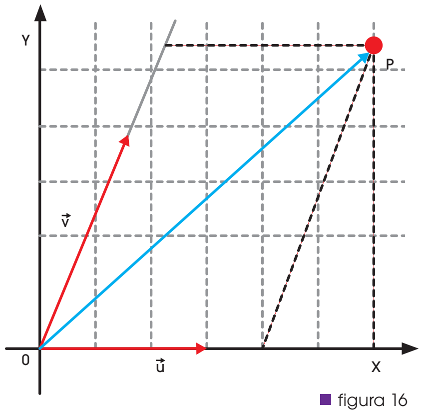


figura 16

Ejemplo 17

Calculemoslas componentes del vector $\vec{v}$ que tiene origen en $A = (2, 5)$ y extremo en $B = (1, 3)$.

Comprensión: A las componentes del vector $\vec{v} = AB$ las obtenemos al restar las componentes de los puntos.

Resolución: $\overrightarrow{AB} = (2, 5) - (1, 3) = (2 - 1, 5 - 3) = (1, 2)$

Comprobación: Representemos gráficamente los puntos para comprobar que las componentes del vector calculadas son las correctas.

Problemas resueltos

A

Operaciones con vectores

1. Un automóvil recorre 100 km en dirección este y luego cambia el rumbo con un giro de 75° hacia el norte durante otros 100 km. Calcular el módulo y el sentido que corresponden a la trayectoria equivalente a la del automóvil. ?

Solución

Comprensión:

La trayectoria equivalente es el resultado de sumar los dos vectores que representan cada uno de los sentidos de movimiento del automóvil.

Datos:

Identificamos el primer movimiento en dirección este con el vector $\vec{u}$.

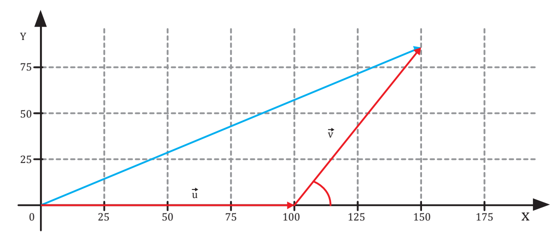
Identificamos el segundo movimiento, después del giro de $+\ 75°$, con el vector $\vec{v}$.

El módulo de cada uno de los recorridos es de 100 km.

Resolución:

Primero, dibujamos el vector de módulo 100 en dirección este (eje horizontal). A continuación, giramos en sentido antihorario 75° y trazamos el siguiente vector de módulo 100 y colocamos el origen de este vector en el extremo del primer vector.

La suma va desde el origen del primer vector hasta el extremo del segundo vector.



B

Operaciones con vectores

1. Determina, sin representarlos, que los puntos $A = (1, 2)$, $B = (4, 2)$ **y** $C = (3, 3)$ **forman un triángulo.**

Solución

Comprensión: Calculamos las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Los puntos formarán un triángulo si los vectores no están alineados.

Resolución:

Componentes de los vectores: $\overrightarrow{AB} = (4, 2) - (1, 2) = (3, 0)$ $\overrightarrow{AC} = (3, 3) - (1, 2) = (2, 1)$.

Los vectores están alineados si existe un número real que verifica $\overrightarrow{AB} = k - \overrightarrow{AB}$ AC; es decir, si $3 = 2k$ y $0 = k$.

Pero como $\frac{3}{2} \neq \frac{0}{1}$, los vectores no están alineados y forman un triángulo.

Comprobación: Representamos gráficamente los puntos en el plano para ver que no están alineados.

C

Bases de V_2

1. Las componentes de un vector expresadas en la base canónica son $\vec{u}= (-5, 5)$. Halla las componentes de este mismo vector expresadas en las bases $B = \{\vec{v}, \vec{w}\}$, teniendo en cuenta que las componentes en la base canónica de los vectores que las forman son $\vec{v} = (1, 3)$ y $\vec{w} = (2, 1)$.

Solución

Comprensión: Para hallar las componentes en la base B, debemos asegurar que los vectores v y w son linealmente independientes y, a continuación, expresar el vector $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Datos:

$\vec{u}= (-5,5)$

componentes → bases : $B = \{\vec{u}, \vec{w}\}$

$\vec{u}= (1, 3)$

$w= (2, 1)$

Resolución: Intenta resolver el problema tú solo. Para ello, oculta la columna de la respuesta y sigue estos pasos:

Pasos

1. Determinamos que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes al demostrar que la relación $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot v= 0$ únicamente se verifica si $a = 0 \quad b = 0$.
2. Escribimos el vector u como combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
3. Sustituimos los vectores por sus componentes, igualamos y resolvemos el sistema de ecuaciones.
4. Escribimos el vector u en la base $\{\vec{v}, \vec{w}\}$.

Respuesta

1. $0 = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$

$(0, 0) = \alpha \cdot (1, 3) + \beta \cdot (2,1) = (\alpha, 3 \cdot \alpha) + (2 \cdot \beta, \beta)= =(\alpha + 2 \cdot \beta, 3 \cdot \alpha + \beta)$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha + 2 \cdot \beta \\ 0 = 3 \cdot \alpha + \beta \end{array}\right\} \alpha = 3, \beta = 4$$

2. $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$

$(-5, 5) = \alpha \cdot (1, 3) + \beta \cdot (2, 1) = (\alpha, 3 \cdot \alpha) + (2 \cdot \beta, \beta) = (\alpha + 2 \cdot \beta, 3 \cdot \alpha + \beta)$

3. $$\left.\begin{array}{l} -5 = \alpha + 2 \cdot \beta \\ 5 = 3 \cdot \alpha + \beta \end{array}\right\} \alpha = 3, \beta = 4$$

4. $\vec{u} = 3 \cdot \vec{v} - 4 \cdot \vec{w}$

Las componentes de $\vec{u}$ en la base B son $\vec{u} = (3, -4)$.

D

Producto escalar de dos vectores

1. Dado el vector $\vec{v}= 3\vec{i} + 4\vec{j}$, halla el módulo de la proyección de este vector sobre otro cuyas componentes sean $\vec{u}= 5\vec{i} + 1\vec{j}$.

Solución

Comprensión: El módulo de la proyección de un vector sobre otro puede obtenerse a partir de la fórmula del producto escalar de dos vectores.

Resolución: La fórmula del producto escalar de dos vectores es $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$ donde $|\vec{v}| \cdot \cos \alpha$ es el módulo del vector $\vec{v}$ proyectado sobre $\vec{u}$.
Para obtener el módulo de la proyección de u sobre $\vec{v}$, expresaremos el producto escalar como $\vec{v} \cdot \vec{u}= |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$ y aislaremos el módulo del vector proyección que es:

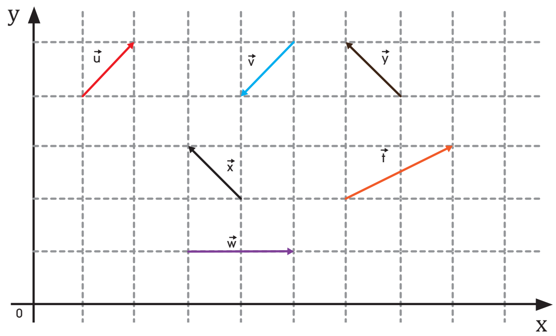
$$|\vec{v}| \cdot \cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}|} = \frac{v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 1}{\sqrt{9 + 16}} = 3{,}8$$

El módulo de la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es 3,8.

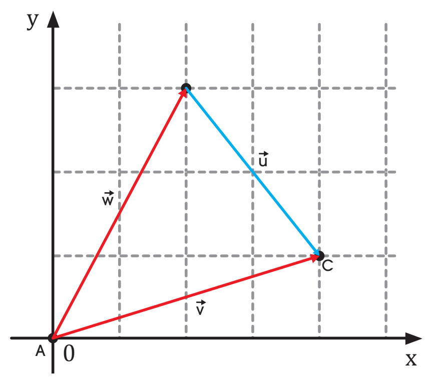
Comprobación: Con un programa de representación gráfica, como GeoGebra, podemos comprobar la solución obtenida.

Ejercicios y problemas propuestos

1 Vectores en el plano:



1. **Observa** la figura e **indica** cuál de las afirmaciones es cierta.



   a. $\vec{w} + \vec{v} = \vec{u}$

   b. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

   c. $\vec{w} + \vec{u} = \vec{v}$

   d. $\vec{w} - \vec{v} = \vec{u}$

2. Dados los puntos $A = (-1, 2)$ y $B = (2, 0)$ del plano, **determina:**
   a. las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.
   b. el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.
   c. **Representa** gráficamente el vector $\overrightarrow{AB}$.
   d. **Determina** un vector unitario en la misma dirección que el vector.

3. **Dibuja** dos vectores cual quiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **Demuestra** la propiedad conmutativa de la suma $(\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u})$. **Utiliza** el programa GeoGebra para demostrar esta propiedad:

TIC

http://goo.gl/U7jjP1

4. Dados los vectores $u = (2, -1)$ y $v = (0, 3)$,

   Determina:
   a. El módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
   b. El producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
   c. El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

5. Si el vector u verifica que $\vec{u} = 2 \cdot \vec{v} - 3 \cdot \vec{w}$, **expresa** v como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

6. **Dibuja** dos vectores cualquiera $u\vec{}$ y $v\vec{}$ y **demuestra** que se cumple:

   a. $3 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

   b. $\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{v} - \vec{u})$

7. ¿Es el vector $\vec{u} = (3, 4)$ combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (3, -3)$ y $\vec{w} = (4, 6)$? **Justifica** tu respuesta.

8. **Expresa** en la base canónica los siguientes vectores:

   a. $\vec{v} = (-9, 4)$

   b. $\vec{v} = -(7, -8)$

   c. $\vec{v} = -\left(\dfrac{7}{3}, 7\right)$

9. Dados los vectores $\vec{v} = (1, 3)$, $\vec{w} = (2, -2)$ y $\vec{t} = (5, -1)$, **halla** si existen dos números reales a y b tales que se cumpla $a \cdot \vec{v} + \vec{b} \cdot \vec{w} = \vec{t}$.

10. **Comprueba** si los vectores $\vec{u} = (-3, 4)$ y $\vec{v} = (9, 4)$ forman una base. **Justifica** tu respuesta.

11. **Demuestra** que los vectores $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (1, -1)$ forman una base y, a continuación, **expresa** el vector $t = (4, 0)$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

12. Las coordenadas del extremo de cuatro vectores posición son $\vec{A} = (1, 1)$, $\vec{B} = (-2, 3)$, $\vec{C} = (-2, -1)$ y $\vec{D} = (3, -1)$.

    a. **Dibuja** el vector resultante de la suma de los cuatro vectores.

    b. **Calcula** las componentes del vector posición resultante.

13. Sean los vectores $\vec{u} = (1, -3)$, $\vec{v} = (2, -1)$ y $\vec{w} = (1,1)$. **Calcula** las componentes de los siguientes vectores:

a. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b. $2 \cdot \vec{w} - \vec{u}$

c. $2 \cdot \vec{v} - \vec{u} - \vec{w}$

d. $-4 \cdot \vec{v} + \vec{u} - 2 \cdot \vec{w}$

14. **Halla** los valores de x e y en cada una de las igualdades entre vectores.

a. $5 \cdot (x, y) + (3, -9) - 2 \cdot (6, 8) + (-11, 10) = (0,0)$

b. $2 \cdot (-3, 7) + 6 \cdot (x, -2) - (13, y) = 2 \cdot (-x, y) + (-91, -49)$

15. **Halla** el valor de k para que la siguiente igualdad entre vectores sea cierta:

$7 \cdot (3, -k) + (-5, -5) = (16, -26)$

16. Sabemos que el vector $\vec{v}$ tiene estas componentes: $(-10, 8)$. **Halla** un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{w} + \vec{v} = (7, 2)$

17. **Calcula** las componentes del vector $\vec{u} = 2 \cdot \vec{v} - 3 \cdot \vec{w}$, sabiendo que $v = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ y $\vec{w} = 7\vec{i} - 3\vec{j}$.

18. Si el segmento de extremos $A = (1, 3)$ y $B = (10, 6)$ se divide en tres partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos de división?

19. **Calcula** el módulo del vector $\vec{v} = (-5, 12)$

20. **Calcula** el producto escalar de los vectores $\vec{v} = (-5, 12)$ y $\vec{w} = (8, 15)$

21. **Calcula** el módulo de la proyección del vector $\vec{u} = (4, 3)$ sobre el vector $\vec{v} = (5, 12)$.

22. **Calcula** el ángulo que forman los vectores $\vec{v} = (-3, 4)$ y $\vec{w} = (8, 15)$. **Representa** la solución gráficamente con GeoGebra.

23. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 5)$ y $\vec{v} = (-5, 7)$, **halla** $(2 \cdot \vec{u}) \cdot (-3 \cdot \vec{v})$.

24. En un reportaje de National Geographic, se describe la trayectoria de una ballena a la que se le ha implantado un localizador. La trayectoria descrita por la ballena considera que el origen de coordenadas se encuentra en la estación de seguimiento. La trayectoria seguida por la ballena es: oeste 3 000 km, norte 2 000 km; luego, 3 000 km dirección este y, finalmente, 4 000 km dirección norte, que es donde el barco de investigación la ha localizado.

a. **Dibuja** la trayectoria que debe seguir el barco desde la estación hasta la posición actual de la ballena.

b. ¿Qué distancia deberá recorrer el barco?

25. **Halla** el valor de la componente x del vector $(20, x)$ de forma que el módulo sea 101.

26. **Halla** el ángulo formado por dos vectores cuyo módulo es $\sqrt{5}$ y 5, respectivamente, y su producto escalar es 9.

27. **Calcula** el valor de k sabiendo que el módulo del vector $\vec{v} = (k, 12)$ es 13.

28. **Calcula** el ángulo que forman los vectores $\vec{v} = (-16, 8)$ y $\vec{w} = (4, -2)$.

29. Sabiendo que $|\vec{u}| = 8$ y que $u_1 v_1 = u_2 v_2 = 43$, **halla** el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

30. **Calcula** el valor de x para que los vectores $\vec{v} = (4, -3)$ y $\vec{w} = (7, x)$ formen un ángulo de 60°.

31. **Calcula** el vector opuesto al vector $\overrightarrow{AB}$ definido por los puntos $A = (7, -4)$ y $B = (-8, 7)$.

32. **Expresa** las componentes del vector cuyo origen es el punto $(2, -3)$ y el extremo es $(7, 9)$.

33. Dados los puntos A, B, C y D cuyas coordenadas son $A = (1, 3)$, $B = (-2, 1)$, $C = (3, 1)$, $D = (-1, 2)$: **Halla** las componentes de los vectores cuyo origen y extremos son los que se indican:

a. $\overrightarrow{AB}$

b. $\overrightarrow{BD}$

c. $\overrightarrow{DC}$

d. $\overrightarrow{CA}$

—**Utiliza** el programa GeoGebra para comprobar los resultados obtenidos.

Ejercicios y problemas propuestos

34. La instalación de un servicio de asistencia mecánica se encuentra en una posición de coordenadas $(120, 110)$ en kilómetros. **Halla** la distancia de un vehículo averiado que llama desde la posición $(-12, 140)$

35. Dado el punto $A = (13, 6)$, **escribe** las coordenadas de otro punto B de modo que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea equipolente al vector $\vec{u} = (4, -9)$.

36. Una barca se desplaza por un río en dirección $(15, 7)$ y la corriente lleva orientación $(-3, 4)$. ¿Cuál es el vector de desplazamiento real de la barca? **Calcula** el módulo del vector de desplazamiento.

37. A, B, C, D son los vértices de un cuadrado. Si dos de los vértices son $A = (-5, -4)$ y $B = (-2, 3)$, **halla** los vértices C, D del cuadrado.

38. Sabemos que el vector de componentes (x, y) cumple que la diferencia entre la segunda y la primera componente es igual a 7 y el módulo del vector es 73. **Calcula** las componentes del vector.

39. **Comprueba** que los puntos $A = (7, 4)$, $B = (-2, 1)$, $C = (6, -3)$ y $D = (7, -2)$ pertenecen a una circunferencia de centro $(3, 1)$. **Halla** el valor del radio de la circunferencia.

40. **Indica** si el triángulo formado por los puntos $A = (1, 3)$, $B = (3, 2)$ y $C = (4, 5)$ es equilátero, isósceles o escaleno. **Justifica** tu respuesta.

41. Dado el vector $\vec{u} = (-3, 7)$: **Dibuja** tres vectores equipolentes al vector $\vec{u}$
    a. **Dibuja** tres vectores equipolentes al vector $\vec{u}$.
    b. **Dibuja** un vector equipolente a $\vec{u}$ con el extremo en $O = (0, 0)$.
    c. **Dibuja** un vector equipolente a $\vec{u}$ con origen en $B = (-7, 12)$.

42. Dado el vector $\vec{v} = (4, 3)$, **halla** la expresión de un vector perpendicular a $\vec{v}$.

43. Las coordenadas de un triángulo son $A = (3, 0)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (5, 2)$. **Halla** las coordenadas del vértice B para que junto a las coordenadas de A y C formen un triángulo rectángulo.

44. La posición de un vehículo sobre unos ejes de coordenadas es el punto $A = (7, 5)$ y se desplaza según el vector $\vec{u} = (9, 5)$. De otro vehículo, sabemos que salió con la misma velocidad de la posición $(12, 43)$ y se dirige al punto $B = (28, 53)$. ¿Pueden llegar a chocar? **Justifica** tu respuesta.

45. Dado el punto $A = (0, x)$, **determina** el valor de x de modo que la distancia de este al punto $B = (5, 7)$ sea de 13 unidades.

46. Un camión queda averiado en la posición $A = (14, 140)$. Llama pidiendo ayuda y le contestan dos servicios de helicópteros que se encuentran en las posiciones $B = (-21, 100)$ y $C = (40, 73)$. Si consideramos que ambos helicópteros avanzan con la misma velocidad, ¿cuál de los dos llegará primero al punto donde se encuentra el camión averiado?

47. Estamos construyendo una carretera que enlace los puntos $A = (12, 21)$ y $B = (17, 23)$. Otro punto se encuentra en $C = (3, 9)$. ¿Es posible que una única carretera permita unir estos tres puntos?

48. Dado el vector $\vec{w} = (28, x)$, **halla** en cada caso, el valor de x para que:
    a. El vector tenga un módulo de 53 unidades.
    b. El producto por el vector $\vec{u} = (-5, 3)$ sea igual a - 44.
    c. El vector sea perpendicular al vector de componentes $(3, -12)$.

49. **Halla** el valor de x en cada una de las siguientes igualdades entre vectores:
    a. $-3 \cdot (x, -2) + (2x, -6) = (14, 0)$
    b. $2 \cdot (3x, -9) + 3 \cdot (-3x, 12) - (-3, 6) = (-15, 12)$

50. Dados los puntos $A = (1, 1)$, $B = (3, 5)$, $C = (10, 6)$ y $D = (7, -1)$, comprueba si forman un trapecio. **Justifica** tu respuesta.

51. **Clasifica** el triángulo determinado por los puntos $A = (4, -3)$, $B = (3, 0)$ y $C = (0, 1)$.
    a. **Calcula** la longitud de cada uno de los lados.
    b. **Halla** el vector suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
    c. **Expresa** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$ en la base canónica.

52. Dados los vectores $\vec{u}=(2,5)$, $\vec{v}=(-3,4)$ y w $(5,12)$

a. **Halla** $2\cdot\vec{u}+3\cdot\vec{v}-5\cdot\vec{w}$.

b. **Halla** $2\ \vec{u}\cdot(-3\cdot\vec{v})$.

c. **Calcula** el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{v}$.

d. **Normaliza** el vector $\vec{v}$.

e. **Expresa** $\vec{w}$ como combinación de los vectores de la base si consideramos como base los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

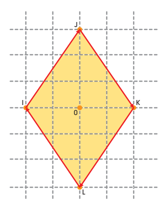
53. Sabemos que los puntos $A=(2,1)$ y $B=(4,3)$ son los extremos del diámetro de una circunferencia.

a. **Calcula** el centro de la circunferencia.

b. **Halla** el radio de la circunferencia.

c. **Dibuja** la circunferencia.

54. I, J, K, L son los vértices de un rombo que forman ángulos de 45° y 135°. Cada lado mide 12 cm. ¿Cuál es el producto escalar de los siguientes vectores?



a. $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OJ}$ b. $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{IJ}$ c. $\overrightarrow{OJ}\cdot\overrightarrow{OL}$

55. Dados los vectores $\vec{u}=(-1,-2)$, $\vec{v}=(2,2)$ y $\vec{w}=(0,-1)$, **calcula** $(2\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{v}+4\vec{w})$.

56. Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de la figura, **calcula** gráficamente.

a. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

b. $-2\vec{w}$

c. $\vec{u}+2\vec{v}$

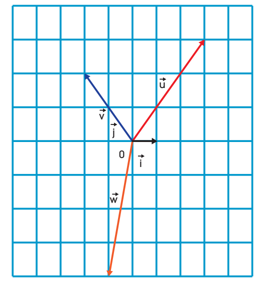
d. $2\vec{u}-\vec{v}$

57. **Halla** las componentes de u, v y w en la base $B=\{\vec{i},\vec{j}\}$ y **efectúa**, con componentes, las operaciones anteriores.

58. **Halla** las coordenadas del extremo C del segmento AC sabiendo que $A=(-6,4)$ y las coordenadas del punto medio B son $(4,-6)$.

59. Las componentes de $\vec{u}$ $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en una cierta base son $\vec{u}=(-1,2)$, $v(\vec{2},3)$ y $\vec{w}=(1,0)$.

—**Expresa** cada uno de estos vectores como combinación lineal de los otros dos.



60. **Divide** en cuatro partes el segmento que tiene por extremos los puntos $A=(-2,0)$ y $B=(2,8)$.

61. Al dividir el segmento AB en tres partes, hemos obtenido los puntos $A_1=(1,0)$ y $A_2=(3,3)$. Si sabemos que las coordenadas del punto A son $(-1,-3)$, ¿cuáles son las coordenadas de B?

2 Problemas de aplicación de vectores en el plano

62. Paula sale de su casa de su casa al colegio y recorre 5 km al este, y luego 6 km al norte. ¿A qué distancia está su escuela?

63. Una niña arrastra un carro de juguete con una fuerza de 120 N en una dirección de 37° sobre la horizontal. **Halla** las componentes horizontal y vertical de esta fuerza.

64. Las componentes rectangulares, Vx y Vy, de un vector V, valen Vx = 6 cm y Vy = 8 cm.

a. ¿Cuál es la magnitud del vector V?

b. ¿Cuál es el ángulo que el vector forma con eje x?

65. Un avión a una cierta altura, partiendo de un punto A, se desplaza a 4 km, hasta el punto B, manteniéndose en la misma altitud. Todavía manteniéndose a la misma altura, se desplaza 3 km, en ángulo recto con la dirección AB, hasta el punto C. A partir de C sube verticalmente, recorriendo una distancia de 5 km, llegando al punto D.

a. **Esboza** el dibujo de los desplazamientos del avión.

b. ¿Cuál es la magnitud del vector desplazamiento resultante AD del avión?

Ejercicios y problemas propuestos

66. Un avión vuela 60 km en una dirección de 40° al Oeste del Norte ¿Cuáles son las componentes rectangulares del desplazamiento del avión?

67. Una mosca se para en la pared de un cuarto. La esquina inferior izquierda de la pared se selecciona como el origen de un sistema de coordenadas cartesianas en dos dimensiones. Si la mosca está parada en el punto que tiene coordenadas $(2, 1)$ m, (a) ¿qué tan lejos está de la esquina del cuarto?

68. Desde el aeropuerto Mariscal Sucre de Quito vuela un avión en dirección N40ºE. Cuando ha volado 200 km, ¿Cuál es la distancia a la que se encuentra el avión al norte del aeropuerto?

69. Desde lo alto de un campanario de 70 m de altura, se ve un parque en frente con un ángulo de depresión de 45°. **Calcula** el área del triángulo que se forma.

70. Un ejecutivo sale de su casa y se dirige hacia su trabajo, al Este, desplazándose una distancia de 3 km, después se dirige a una tienda, que queda al Norte, recorriendo 4 km. **Determina** el desplazamiento total que realiza el ejecutivo.

71. Supón, que la misma persona del ejercicio anterior, parte de su y casa se desplaza 5 km hacia el Este, después, se dirige a Noreste recorriendo 6 km. **Determina** la magnitud y dirección del desplazamiento resultante

72. Una fuerza horizontal de 600 N y una vertical de 400 N, actúan simultáneamente sobre el mismo cuerpo. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante y su dirección con la horizontal?

73. Dos fuerzas de 500 N y 800 N actúan sobre el mismo cuerpo. Si el ángulo entre ellas es de 120°, **calcula** la magnitud de la resultante y su dirección con respecto a la fuerza de 500 N.

74. Dos fuerzas de 200 N y 300 N, actúan sobre el mismo cuerpo formando un ángulo recto una con la otra. **Determina** la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

75. Un aeroplano vuela al Suroeste 200 km, luego vira hacia el Este 300 km, cuando es forzado a aterrizar. ¿A qué distancia y en qué dirección está el aeroplano de su base?

76. Marino pasea en su bicicleta a 8 km/h, va hacia el Sur durante 2 h, luego da vuelta y se dirige al Este durante 1,5 h. **Determina** la magnitud y dirección de su desplazamiento resultante.

77. **Encuentra** las coordenadas del ortocentro, punto en el que se cortan las alturas del triángulo cuyos vértices son $A = (-4, 2)$, $B = (0, 6)$ y $C = (6, -4)$.

78. **Obtener** las coordenadas del punto de aplicación del vector $\overrightarrow{AB}$ $(2; -3)$, sabiendo que tiene su extremo en el punto $B\ (-1, 2)$.

79. Dados los puntos $A = (-3, 7)$ y $B = (5, -4)$: **Halla** las componentes del vector $\overrightarrow{BA}$. **Comprueba** que se cumple $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. **Halla** el punto medio de los dos puntos y las componentes del vector $2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

80. Dados los puntos $A = (3, 7)$, $B = (-2, -3)$ y el vector $\vec{u} = (4, -5)$, **halla** un punto C que cumpla:
    a. $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$
    b. $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot (\overrightarrow{BC}) = 3\vec{u}$

81. **Halla** el módulo del vector cuyo origen es el punto $A = (-14, 9)$ y el extremo es $B = (-2, 14)$.

82. Sabemos que las componentes del vector $\vec{v}$ son $(8, -6)$. **Halla** un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{w} + 3 \cdot \vec{v} = (1, 4)$.

83. **Halla** el producto escalar de $\vec{w} \cdot 3 \cdot \vec{v}$ sabiendo que $\vec{w} = (-3,5)$ y $\vec{v} = (1, 4)$

84. Si consideramos los vectores $\vec{v} = (-1, 2)$, $\vec{w} = (2, -3)$ y $\vec{t} = (5, -6)$, comprueba si existen dos números reales a y b tales que se cumpla $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} = \vec{t}$.

85. Dado el vector $(-40, 9)$, **halla**:
    a. Su módulo
    b. El ángulo que forma con el vector (3, 7)
    c. El producto escalar con el vector (1, 10)
    d. Un vector con la misma dirección, el mismo sentido y con módulo 2

86. **Calcula** los ángulos del triángulo cuyos vértices son los puntos $A = (6, 5)$, $B = (3, 10)$ y $C = (1, 2)$.

Vectores

Vectores fijos

Pares ordenados de puntos que se definen a partir de su módulo, su sentido y su dirección.

Vectores libres

El conjunto de todos los vectores fijos equipolentes a un vector dado.

Operaciones con vectores

Producto de un número real por un vector: $k \cdot \vec{u}$

Suma y resta de vectores: $\vec{u} \pm \vec{v}$

Combinación lineal de vectores

Escritura de vectores utilizando las operaciones con vectores.

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$$

Bases de V2

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con diferente dirección forman una base y si:

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$$

a y b son las componentes de $\vec{u}$ en esta base.

Operaciones con componentes

Podemos usar las componentes de los vectores para efectuar operaciones:

Producto de un número real por un vector:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

Suma y resta de vectores:

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2)$$

Producto escalar de dos vectores

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

Expresión analítica en una base ortonormal:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

Lo podemos usar para calcular el módulo de un vector y para calcular el ángulo que forman dos vectores.

Coordenadas de un punto en el plano

Utilizando un sistema de referencia $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}\}$, definimos las coordenadas de un punto P de la siguiente forma:

$$[\overrightarrow{OP}] = \vec{p} = p_1\vec{u} + p_2\vec{v} \Rightarrow P = (p_1, p_2)$$

Para finalizar

1 **Indica** si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

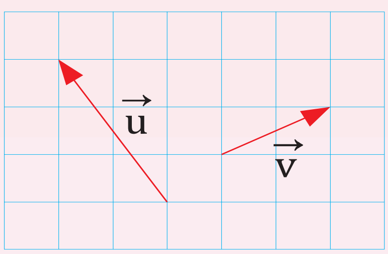
a. Un conjunto de vectores equipolentes son linealmente dependientes entre ellos.

b. En el plano, dos vectores no nulos de diferente dirección siempre son linealmente independientes.

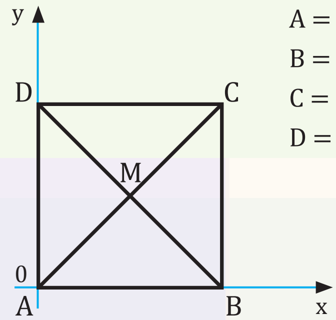
c. Tres vectores del plano, no nulos y de diferente dirección, son linealmente independientes.

d. La suma de dos vectores con el mismo origen, módulo y dirección es un vector cuyo módulo es el doble del módulo de los originales.

2 **Representa** en un sistema de referencia coordenado (x, y), los siguientes vectores.



3 **Observa** el cuadrado de esta figura:



$A = (0, 0)$
$B = (2, 0)$
$C = (2, 2)$
$D = (0, 2)$

A continuación, **indica** el vector resultante de las siguientes operaciones:

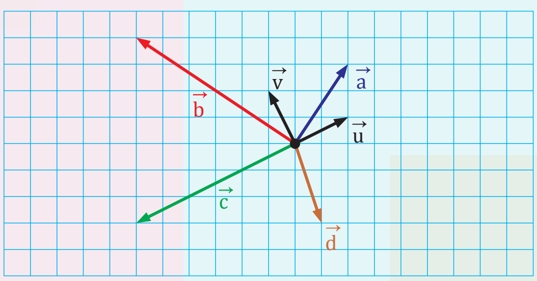
a. $[\overrightarrow{AD}] + [\overrightarrow{DB}]$

b. $[\overrightarrow{AM}] + [\overrightarrow{AB}]$

c. $[\overrightarrow{AD}] - [\overrightarrow{AB}]$

d. $[\overrightarrow{AB}] + \frac{1}{2}[\overrightarrow{BD}]$

4 **Expresa** los vectores representados en esta figura como combinación lineal de $\vec{u}$ y v, en un sistema de referencia coordenado.



EVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad temática?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

NOTICIA

Utilización de ideas geométricas en la navegación, la arquitectura y el arte

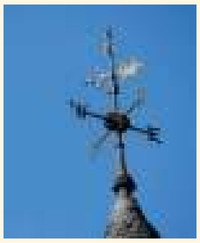
La utilización de vectores no es exclusiva del ámbito matemático.
Los vectores son un caso particular de sistema de coordenadas, por lo que se emplean para resolver problemas en muchos ámbitos científicos, artísticos y tecnológicos.
En cartografía hacemos uso de vectores, pero expresados en coordenadas distintas de las rectangulares (x, y). Utilizamos coordenadas esféricas, y hablamos de longitud y latitud en vez de abscisa y ordenada. En astronomía y en navegación marítima podemos determinar la latitud a partir de la altura de los astros. Esta altura viene dada por el ángulo que forma con los ejes fijos en el observador el vector que une el astro con el origen de los ejes. Es de uso habitual en observación astronómica.
Asimismo, los controladores aéreos de los aeropuertos utilizan vectores para describir la posición de los aviones en cada instante.


https://goo.gl/lkwQ9q

Al trabajar con vectores de más de dos componentes, pueden obtenerse las denominadas *superficies regladas*.
Estas son muy utilizadas en arquitectura y en el arte porque pueden reproducirse plásticamente mediante hilos tirantes y pueden generarse con un conjunto de rectas.

SENTIDO CRÍTICO

Los vientos se representan con una línea, que a veces puede acabar en un círculo y contiene información de la dirección en que soplan y la velocidad.



En los siguientes enlaces encontrarás más información:

TIC

http://www.diccionario-nautico.com.ar/rosa-de-los-vientos.php
http://www.velaclasicamenorca.com/rosa-vientos.htm
http://www.titulosnauticos.net/meteorologia/index.htm?beaufort.htm
http://www.tiempo.com/mapas-meteorologicos/viento/Mapas-de-viento-en-Espana.html

a. ¿Qué 16 direcciones señala la rosa de los vientos? ¿Qué dirección elige como origen?

—¿Qué ángulo tiene el resto de las direcciones?

b. ¿Qué relación encuentras entre la representación del viento y los vectores?

c. **Dibuja** los símbolos para temporal huracanado, temporal, fresco, bonancible y calma.

—A continuación, **describe** las características de cada uno de ellos.

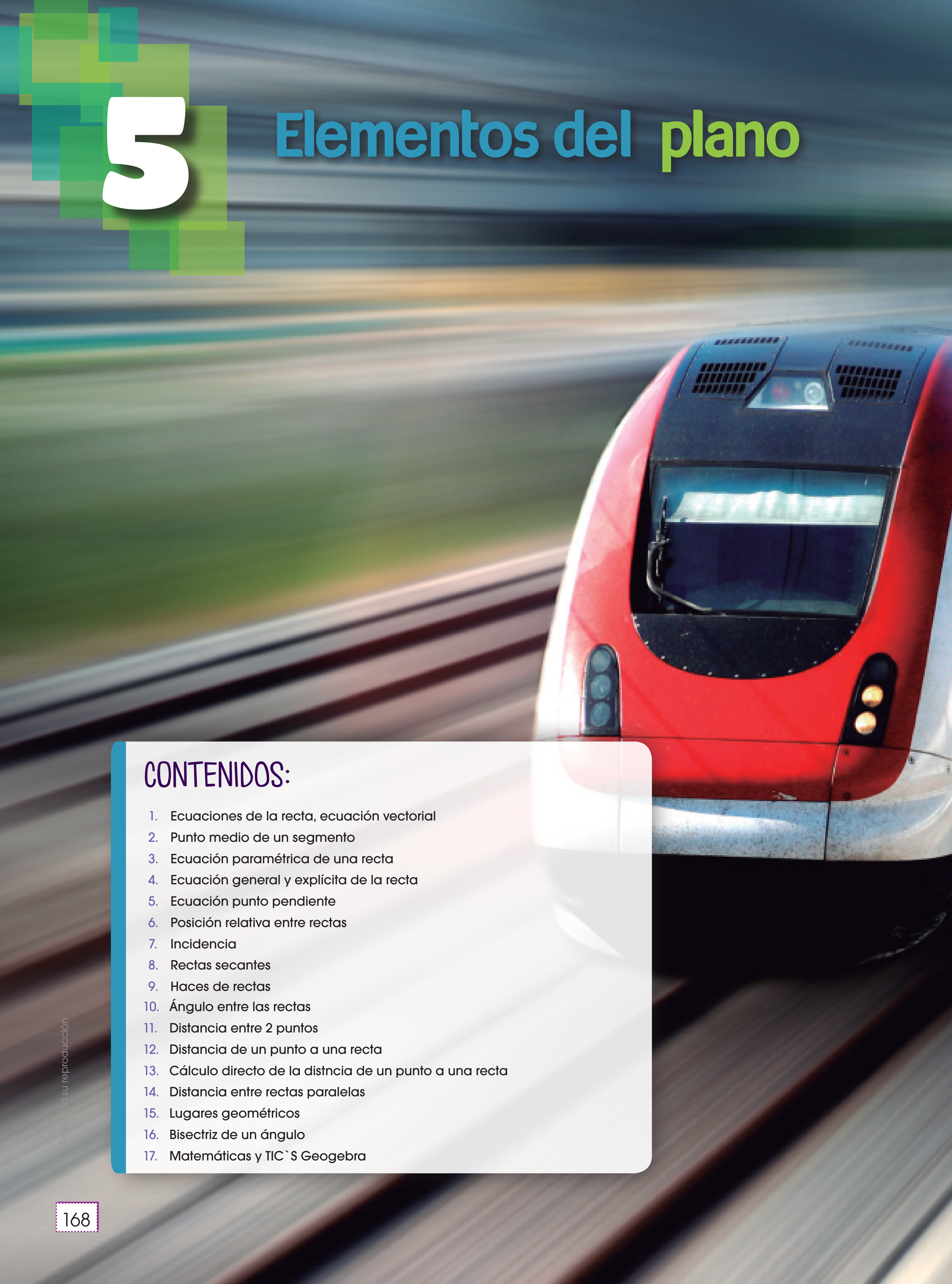
d. **Dibuja** un viento de 63 km/h y dirección oeste-noroeste.

e. **Observa** atentamente los mapas de viento de hoy en Europa, España y Canarias. **Compáralos** e **indica** las direcciones del viento y velocidades.

SI YO FUERA

Piloto...

disfrutaría viajando a nuevos lugares, conocería personas de todo el mundo, con otras culturas y costumbres y aprendería muchos idiomas.
Usaría mis instrumentos de navegación donde se aprecian los vectores interpretaría hacia dónde dirigir el avión y a qué velocidad. Ocasionalmente colocaría en piloto automático.
Es bueno aprender sobre vectores, husos horarios, latitud y longitud porque desarrollas tu ubicación espacial de mejor manera.



5 Elementos del plano

CONTENIDOS:

1. Ecuaciones de la recta, ecuación vectorial
2. Punto medio de un segmento
3. Ecuación paramétrica de una recta
4. Ecuación general y explícita de la recta
5. Ecuación punto pendiente
6. Posición relativa entre rectas
7. Incidencia
8. Rectas secantes
9. Haces de rectas
10. Ángulo entre las rectas
11. Distancia entre 2 puntos
12. Distancia de un punto a una recta
13. Cálculo directo de la distncia de un punto a una recta
14. Distancia entre rectas paralelas
15. Lugares geométricos
16. Bisectriz de un ángulo
17. Matemáticas y TIC`S Geogebra

http://goo.gl/Kz401J

Noticia:

Premio Abel para Pierre Deligne, hacedor de puentes entre islas matemáticas (...) El galardón, a menudo referido como el Nobel de las matemáticas, reconoce las «contribuciones seminales» de Deligne a la geometría algebraica (...).«Sus poderosos conceptos, ideas, resultados y métodos», sigue reconociendo la Academia, «siguen influyendo en el desarrollo de la geometría algebraica, y de las matemáticas en su conjunto» (...). El matemático José Ignacio Burgos, investigador del ICMAT (...), explica que el premiado no solo tendió nexos creativos para derribar algunas de las «fronteras internas» de las matemáticas (como la que separa la geometría del álgebra), sino también otras fronteras externas, con implicaciones en la física teórica. (...) «La geometría algebraica tuvo en principio unos objetivos simples», dice Burgos. «Se trataba de saber qué figuras geométricas pueden ser soluciones de las ecuaciones polinomiales; pero esta materia ha alcanzado con el tiempo un grado de sofisticación soberbio» (...).

El País, 20-3-2013 (adaptación).

Video:

La *cicloide* es una curva con propiedades geométricas curiosas que puedes ver en el siguiente enlace:

http://links.edebe.com/3x8zvk

EN CONTEXTO:

1. Reflexiona durante unos momentos:
   a. ¿Qué sabes acerca de la geometría analítica?
   b. ¿Qué preguntas o inquietudes te surgen sobre ello?

   —¿Qué te gustaría investigar sobre este tema?

   Anota tus respuestas a las tres preguntas y, en grupos, poner en común para exponer sus conclusiones ante el grupo de compañeros.

2. Después de ver el vídeo de la cicloide, **contesta**:
   a. ¿El camino más corto es siempre el más rápido?
   b. La cicloide es una curva tautócrona. ¿Qué significa?
   c. ¿Qué ventajas tendría un péndulo cuya trayectoria fuera una cicloide?

https://goo.gl/iMe4eo

René Descartes

(La Haye, 1596 - Estocolmo, 1650)

Su obra más importante fue el Discurso del método, publicada en el año 1637.

En uno de los apéndices de esta obra, titulado «Geométrie», desarrolla procedimientos geométricos para resolver determinados problemas algebraicos e introduce el sistema de referencia que actualmente se conoce como coordenadas cartesianas.

Extraído del libro Matemáticas I Bachillerato
Editorial Edebe España

1. ECUACIONES DE LA RECTA ECUACIÓN VECTORIAL

Una recta es un elemento geométrico, formado por una sucesión infinita de puntos en una sola dimensión.

Una recta en el plano queda determinada por dos puntos, A y B, o por un punto A y un vector $\vec{u}$ llamado vector director, que indica su dirección. Calcular la ecuación de una recta consiste en hallar la relación que cumplen todos sus puntos. **Observa** las distintas formas que tenemos de expresar una recta.

Ecuación de la recta en forma vectorial

Consideramos una recta determinada por un punto $A = (a_1, a_2)$ y un vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la recta y $\vec{p}$ y $\vec{a}$ son los vectores posición de P y A respectivamente, aplicando la suma de vectores se verifica que cualquier punto P cumplirá:

$$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP}$$

El vector $\overrightarrow{AP}$ tiene la misma dirección que el vector $\vec{u}$ y podremos escribirlo como $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u}$, siendo k un número real. Sustituimos a la igualdad anterior, y obtenemos la ecuación vectorial de la recta.

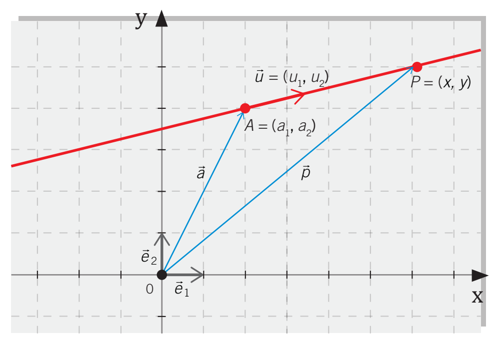


figura 1

$$\vec{p} = \vec{a} + k \cdot \vec{u} \text{ donde } k \in \mathbb{R}$$

Dando valores al parámetro k, obtenemos todos los puntos de la recta; así, para $k = 0$ obtenemos el punto A y para $k = 1$ obtenemos el punto $(a_1 + u_1, a_2 + u_2)$.

Y TAMBIÉN: ¿?

Un sistema de referencia en el plano se define a partir de un punto fijo O llamado origen y una base formada por dos vectores $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ con distinta dirección.

A partir de un sistema de referencia, se pueden expresar analíticamente los elementos del plano.

Ejemplo 1

Una recta por el punto A (3,-2) y tiene un vector director = (-1, 3). Escribir su ecuación vectorial. (x, y)= (3; -2) + k (-1; 3)

Actividades

1. **Escribe** la ecuación vectorial de la recta que pasa por:

   a. $A\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ t $\vec{v}= (0{,}75;1{,}5)$

   b. $\vec{v}= (0{,}75;1{,}5)$ y el punto $B\ (-8; -5)$

2. **Calcula** todas las ecuaciones de la recta determinada por el vector $\vec{v}= (-1, 2)$ y el punto $P = (0, -1)$

2. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Para hallar el punto medio del segmento que une dos puntos P y Q, podemos utilizar la ecuación vectorial de la recta.

Sea el vector posición del punto medio del segmento $\overline{PQ}$. Este punto verificará la ecuación.

$$\vec{m} = \vec{p} + \frac{1}{2}\,\overline{PQ}$$

$$(m_1, m_2) = (p_1, p_2) + \frac{1}{2}\,(q_1 - p_1,\ q_2 - p_2)$$

$$(m_1, m_2) = \left(p_1 + \frac{1}{2}\,(q_1 - p_1),\ p_2 + \frac{1}{2}\,(q_2 - p_2)\right)$$

$$(m_1, m_2) = \left(\frac{p_1 + q_1}{2},\ \frac{p_2 + q_2}{2}\right)$$

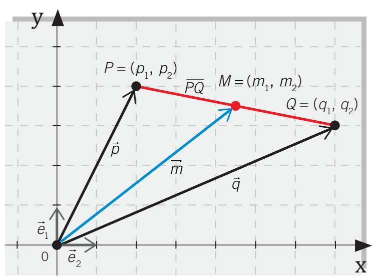


figura 2

El punto medio M de un segmento $\overline{PQ}$ es la semisuma de las coordenadas de P y Q.

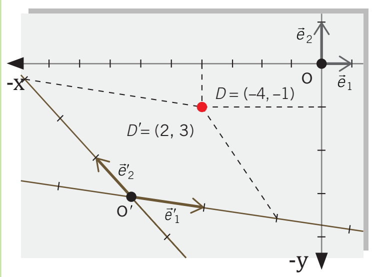
si $P = (3, 5)$ y $Q = (7, -3)$, el punto medio M del segmento $\overline{PQ}$ es:

$$M = \left(\frac{7 + 3}{2}, \frac{5 - 3}{2}\right) = (5, 1)$$

http://goo.gl/xsl9oz

Árboles dispuestos en linea recta

Y TAMBIÉN: ¿?



Un mismo punto D tiene distintas coordenadas según cual sea el sistema de referencia elegido.

Actividades

3. **Determina** las coordenadas del punto medio de los segmentos determinados por los siguientes pares de puntos:

   a. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$ b. $\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$ y $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$

4. **Determina** las coordenadas del punto medio del segmento de recta cuyos extremos son los puntos A (-9, 15) y B (-5, -5).

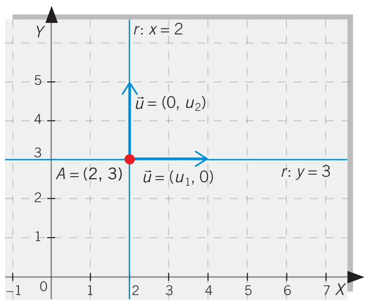
5. Las coordenadas del punto medio del segmento AB son (5, -2). Si un extremo del segmento es A (7, -1). **Hallar** las coordenadas de B.

6. Dados los puntos P (-2, 7) y Q (10, -1). Sea M el punto medio de PQ y N el punto medio de PM. **Encuentra** las coordenadas de N.

7. Si M (5, -3) es el punto medio del segmento de recta que une a (x, -2) y (6, y). **Encuentra** los valores de x e y.

Y TAMBIÉN: ¿?

Si $\vec{u}$ es un vector director, $\vec{v} = k\,\vec{u}$, donde k $\in \mathbb{R}$, también lo es.



Si $\vec{u} = (0, u_2)$ es un vector director de la recta r que pasa por el punto $A = (2, 3)$, la recta r tendrá como ecuación $x = 2$. Si $\vec{u} = (u_1, 0)$, la ecuación de r será $y = 3$.

3. ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE UNA RECTA

Si expresamos la ecuación vectorial de la recta utilizando las componentes de los vectores y operamos, se obtiene:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + k\,(u_1, u_2)$$

$$(x, y) = (a_1, a_2) + (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

$$(x, y) = (a_1 + k \cdot u_1, a_2 + k \cdot u_2)$$

Al igualar componentes, obtenemos la ecuación paramétrica de la recta.

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + k\,u_1 \\ y &= a_2 + k\,u_2 \end{aligned}\right\}, \text{ donde } k \in \mathbb{R}$$

Igual que en la ecuación vectorial, los diferentes puntos de la recta se obtienen dando valores al parámetro k.

Del mismo modo, si queremos saber si un punto concreto pertenece a la recta, sustituiremos el punto en la ecuación dada y resolveremos. El punto pertenecerá a la recta si el valor de k obtenido es el mismo para ambas ecuaciones.

Ecuación continua

Si despejamos k de la ecuación paramétrica e igualamos las expresiones resultantes, obtenemos la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$$

La ecuación continua solo tiene sentido si las componentes y del vector director de la recta son distintas de cero.

Ejemplo 2

1. Dados el punto $A = (2, -3)$ y el vector director $\vec{u} = (6, 4)$:

   a. Hallemos la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta r determinada por A y $\vec{u}$.

   b. ¿Pertenecen los puntos $B = (5, -1)$ y $C = (4, 2)$ a la recta r?

Comprensión: Para expresar las diferentes ecuaciones, sustituiremos el punto y el vector director en la expresión general de cada una de ellas. Para comprobar si B y C pertenecen a la recta, sustituiremos ambos puntos en la ecuación paramétrica.

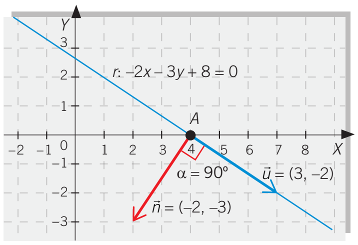
Resolución:

a. Ec. vectorial: $\vec{x} = (2, -3) + k \cdot (6, 4)$; Ec. paramétrica: $\left.\begin{aligned} x &= 2 + 6k \\ y &= -3 + 4k \end{aligned}\right\}$; Ec. continua: $\dfrac{x - 2}{6} = \dfrac{y + 3}{4}$

b. Sustituimos las coordenadas de B y C en la ecuación paramétrica:

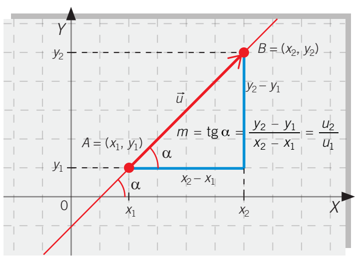
$$\left.\begin{aligned} 5 &= 2 + 6k \\ -1 &= -3 + 4k \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} k &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ k &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow B = (5, 1) \in r \qquad \left.\begin{aligned} 4 &= 2 + 6k \\ 2 &= -3 + 4k \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} k &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ k &= \frac{5}{4} \end{aligned}\right\} \rightarrow C = (4, 2) \notin r$$

Y TAMBIÉN: ¿?



El vector $\vec{n} = (-2, -3)$ es normal a la recta $-2x - 3y + 8 = 0$ de vector director $\vec{u} = (3, -2)$.

La pendiente de una recta indica el grado de inclinación de la recta con la horizontal.



La pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje OX. Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es un vector director de la recta, su pendiente es:

$$\text{tg}\,\alpha = m = \frac{u_2}{u_1}$$

Tres puntos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ están alineados si las pendientes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son iguales; es decir $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen la misma dirección $\Leftrightarrow$

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - b_2}$$

4. ECUACIÓN GENERAL Y EXPLÍCITA DE LA RECTA

Al desarrollar la ecuación continúa y agrupar términos, obtenemos:

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} \Rightarrow u_2(x - a_1) = u_1(y - a_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_2x - u_2a_1 = u_1y - u_1a_2 \Rightarrow u_2x - u_1y - u_2a_1 + u_1a_2 = 0$$

Si hacemos los cambios $A = u_2$, $B = -u_1$ y $C = -u_2a_1 + u_1a_2$, obtenemos la **ecuación general de la recta.**

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

Observa que un vector director de r es $\vec{u} = (-B, A)$ y un vector normal a esta tendrá la forma $\vec{n} = (A, B)$, pues se verifica que el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{n}$ es nulo:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (-B, A) \cdot (A, B) = -AB + AB = 0$$

Ejemplo 3

Hallemos la ecuación general de la recta cuyo vector director es $\vec{u} = (3, -5)$ y pasa por el punto $P = (1, -2)$.

Comprensión: Obtendremos la ecuación general calculando los parámetros A, B y C a partir del vector director y del punto P de la recta.

Resolución: Calculemos los parámetros A y B a partir del vector director:

$\vec{u} = (3, -5) = (-B, A) \Rightarrow B = -3$ y $A = -5$

Sustituimos estos valores en la ecuación general: $-5x - 3y + C = 0$.

Calculemos C imponiendo que la recta pase por el punto P:

$-5 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + C = 0 \;\; 1 \;\; -5 + 6 + C = 0 \;\; 1 \;\; C = -1$

La recta es: $-5x - 3y - 1 = 0$.

Comprobación: Podemos ver que la ecuación es correcta sustituyendo el vector director y el punto en la ecuación continua, y transformándola en la ecuación general.

Ecuación explícita de la recta

Si despejamos y de la ecuación continua, tendremos:

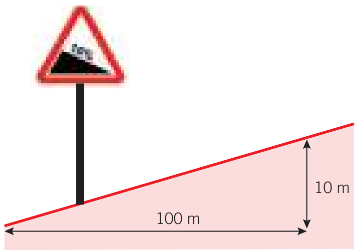
$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} \Rightarrow \frac{u_2}{u_1}(x - a_1) = y - a_2$$

$$y = \frac{u_2}{u_1}x - \frac{u_2}{u_1}a_1 + a_2$$

Definiendo $m = \frac{u_2}{u_1}$, $n = -\frac{u_2}{u_1}a_1 + a_2$, obtenemos la ecuación explícita de la recta.

$$y = mx + n$$

En la ecuación explícita, m es la pendiente de la recta y n es su ordenada en el origen.



Pendiente de la carretera cuyo desnivel es el 10 % ⇒ m = 10 / 100 = 0,1.

5. ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

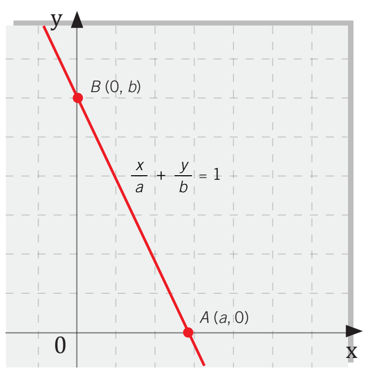
Partimos de nuevo de la ecuación continua y aislamos $y - a_2$:

$$\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} \Rightarrow y - a_2 = \frac{u_2}{u_1}(x-a_1)$$

Teniendo en cuenta que hemos definido la pendiente como $m = \dfrac{u_2}{u_1}$, obtenemos la ecuación punto-pendiente.

$$y - a_2 = m \cdot (x - a_1)$$

Y TAMBIÉN: ¿?



Ecuación canónica de la recta que pasa por $B = (0, b)$ y $A = (a, 0)$.

Ecuación canónica de la recta

Otra forma de expresar una recta es a partir de sus cortes con los ejes. Si, por ejemplo, esta pasa por $A = (a, 0)$ y $B = (0, b)$, hallamos un vector director:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0 - a, b - 0) = (-a, b)$$

Si sustituimos un punto y el vector director en la ecuación continua y operamos, obtenemos la ecuación canónica de la recta:

$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y-0}{b} \Rightarrow -\frac{x}{a} + \frac{-a}{-a} = \frac{y}{b} \Rightarrow 1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta expresión solo tiene sentido si la recta corta los dos ejes de coordenadas, es decir, siempre que no pase por el centro de coordenadas.

Ecuación de la recta		
Sea un punto $A = (a_1, a_2)$ de la recta r y un vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$. La pendiente es $m = u_2 / u_1$.		
Tipo de ecuación	Ecuación	Ejemplo: P = (−2, 1) $\vec{u} = (3, -4)$
Vectorial	$\vec{p} = \vec{a} + k\vec{u}$, donde $k \in \mathbb{R}$	$\vec{p} = (-2, 1) + k(3, -4)$, donde $k \in \mathbb{R}$
Paramétrica	$r: \left.\begin{array}{l} x = a_1 + ku_1 \\ y = a_2 + ku_2 \end{array}\right\}$, donde $k \in \mathbb{R}$	$r: \left.\begin{array}{l} x = -2 + 3k \\ y = 1 - 4k \end{array}\right\}$ donde $k \in \mathbb{R}$
Continua	$\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2}$	$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4}$
General	$Ax + By + C = 0$ $\vec{u} = (-B, A)$ $\vec{n} = (A, B)$ pendiente: $m = -A / B$	$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4} \Rightarrow -4x - 8 = 3y - 3 \Rightarrow$ $-4x - 3y - 5 = 0$ 1 $4x + 3y + 5 = 0$
Explícita	$y = mx + n$, m pendienten ordenada en el origen	$-4x - 3y - 5 = 0 \Rightarrow -3y = 4x + 5 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$
Punto-pendiente	$y - a_2 = m \cdot (x - a_1)$	$m = -\frac{4}{3} \Rightarrow y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2)$
Canónica	Pasa por $P = (a, 0)$ y $Q = (0, b)$: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Si $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$ y si $y = 0 \Rightarrow x = -5/4 \Rightarrow \frac{x}{-5/4} + \frac{y}{-5/3} = 1$

6. POSICIÓN RELATIVA ENTRE RECTAS

http://goo.gl/QMtL7E

Para dar indicaciones o situarnos en un plano, es habitual utilizar las posiciones relativas de las rectas.

Dos rectas en el plano pueden ser paralelas si no tienen puntos en común, secantes si se cortan en un punto y coincidentes si comparten todos sus puntos.

Ejemplo 4

El rally safari

Es una prueba de características únicas y con un reconocido prestigio. El mítico Safari se aparta del funcionamiento habitual de las pruebas del Mundial de Rallies. Con salida y meta en Nairobi, su centro neurálgico, obliga a los participantes a rodar por pistas llenas de trampas a velocidades infernales, castigando al máximo las mecánicas y poniendo a prueba tanto la resistencia física como la capacidad de concentración de los pilotos. En el rally safari, competición de automóviles del campeonato del mundo, se producen más abandonos que en ninguna otra competición.

http://goo.gl/NAnL04

Debido a los problemas meteorológicos hay grandes riesgos de choque entre autos y animales. Para intentar evitarlos, dos de los participantes trazan en sus caravanas un plano del recorrido que van a realizar el día siguiente.

Un participante francés va a salir desde el punto de coordenadas $A\ (2{,}1)$, seguirá una trayectoria recta pasando por el punto $B\ (-15,\ 18)$ hasta que el coche aguante.

La participante española saldrá desde el punto $C\ (5{,}-1)$ y con trayectoria recta pasará por un pueblo de coordenadas $(-20{,}24)$.

Si salen a la misma hora y van a la misma velocidad, ¿crees que hay posibilidades de que lleguen a chocar?

Solución:

Se trata de saber si las rectas que definen sus trayectorias son incidentes o no (es decir, se cortan en un punto o no). Para ello, veamos cómo quedan determinadas ambas rectas.

6.1 Rectas paralelas y coincidentes

En el plano dos rectas son **paralelas** si tienen la misma dirección, es decir, tienen vectores directores proporcionales, o lo que es lo mismo, tienen la misma pendiente.

Al conjunto de todas las rectas paralelas a una determinada recta r: $Ax + By + C = 0$, se le denomina haz de rectas paralelas. Las rectas que forman el haz tienen la forma:

$$Ax + By + k = 0 \text{ donde } k \in \mathbb{R}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

∥ paralelas, misma dirección
$\perp$ perpendicular
$\angle$ ángulo

Si la ecuación explícita de r es $y = mx + n$, el haz se expresa:

$y = mx + k$, donde $k \in \mathbb{R}$.

Dos rectas paralelas con un punto en común tienen todos los puntos en común. Son rectas coincidentes.

Condición de paralelismo

Para saber si dos rectas son paralelas, podemos fijarnos en sus coeficientes o resolver el sistema de ecuaciones que forman.

Sean $r: Ax + By + C = 0$ y $s: A'x + B'y + C' = 0$ dos rectas cualesquiera.

Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \Rightarrow$ r y s **son paralelas;**

si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \Rightarrow$ r y s **son coincidentes.**

Si el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas no tiene solución (es incompatible), las rectas son paralelas. Si el sistema tiene infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado), las rectas son coincidentes.

Continuando con el ejemplo de la página anterior

Las rectas para el competidor francés y la española serían:

$$f \begin{cases} A(2, 1) \\ \vec{v}_f = \overrightarrow{AB} = (-17, 17) \end{cases} \qquad e \begin{cases} C(5, -1) \\ \vec{v}_e = \overrightarrow{CD} = (-25, 25) \end{cases}$$

Puesto que las coordenadas de sus vectores directores son proporcionales y no lo son las del vector $(3,2)$, que va de A a C, resulta que ambas rectas son paralelas, y por lo tanto no hay ninguna posibilidad de que choquen.

Ejemplo 5

1. **Indica** si los siguientes pares de rectas son paralelas:

   a. $r: -3x + 4y - 5 = 0$ $\qquad s: y = 2x + 3$

   b. $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3}$ $\qquad s: 6x - 4y + 1 = 0$

Comprensión: Podemos comparar sus vectores directores o sus pendientes para ver si las rectas son paralelas.

Resolución:

a. $\vec{u}_r = (-B, A) = (-4, -3) \Rightarrow$ La pendiente de r es $m_r = \frac{3}{4}$ y la de s es $m_s = 2$.
   Por lo tanto, no son paralelas.

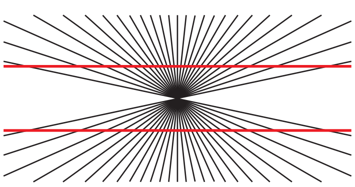
b. $\vec{u}_r = (2, 3)$ y $\vec{u}_s = (-B, A) = (4, 6) \Rightarrow$ Los vectores directores son proporcionales y, por lo tanto, las rectas son paralelas.

Comprobación: Para ver que la solución es correcta, podemos expresarlas en la forma general y comparar los coeficientes, o resolver el sistema de ecuaciones.

Y TAMBIÉN: ¿?

Las rectas paralelas al eje X son de la forma:
$y = k$, donde $k \in \mathbb{R}$.
Las rectas paralelas al eje Y son de la forma:
$x = k$, donde $k \in \mathbb{R}$.

http://goo.gl/wvrrKo



Las líneas rojas son rectas paralelas, aunque nuestros ojos «nos engañen». Es una ilusión óptica.

Curiosidades del rally

Más o menos hasta los años sesenta el rally se disputaba en carreteras abiertas al tráfico.

-El Porsche 911 al principio se iba llamar 901 pero Peugeot tenía registrados todos los números de tres cifras con un 0 en el medio

7. INCIDENCIA

Incidir quiere decir: estar en, pasar por, es lo mismo que decir que está incluido o que pertenece pero es más genérico por cuanto se puede decir que un punto está incluido en una recta pero no se puede decir que una recta está incluida en un punto, de forma genérica e indistintamente podemos decir que un punto incide en una recta o una recta incide en un punto.

Incidencia de puntos

Un punto $P\ (p_1,p_2)$ pertenece a una recta de ecuación $Ax + By + C = 0$, cuando las coordenadas del punto satisfacen la igualdad: $Ap_1 + Bp_2 + C = 0$.

Cuando un punto P pertenece a una recta r se dice que r incide en P o que r pasa por P.

Ejemplo 6

1. Analizar si los puntos $A\ (3, 5)$ y $B\ (0, 1)$ pertenecen o no a la recta $r : x + 2\,y - 13 = 0$.

Solución:

2. Sea $A\ (3, 5) \Rightarrow 3 + 2 \cdot 5 - 13 = 3 + 10 - 13 = 0$

   Sea $B\ (0, 1) \Rightarrow 0 + 2 \cdot 1 - 13 = 2 - 13 = -11 \neq 0$

   Por tanto: $A \in r \wedge B \notin r$

Incidencia de rectas

Cuando dos rectas r y s tienen un punto común, se dice que tienen un punto de intersección.

Para hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones de las rectas.

Ejemplo 7

Hallemos el punto de intersección de las rectas de ecuaciones $r = 2\,x - y - 1 = 0$ y $s = x - y + 1 = 0$

Solución:

1. Formamos el sistema con ambas ecuaciones: $\left.\begin{matrix} 2x - y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{matrix}\right\}$
2. Resolvemos el sistema de ecuaciones, por cualquier método ya estudiado

Por igualación

$2x - 1 = y$

$x + 1 = y$

$2\,x - 1 = x + 1$

$x = 2$

Sustituyendo x en 1

$2 \cdot 2 - 1 = y$

$y = 3$

Por reducción

Multiplicamos por (-1) la primera ecuación

$-2x + y + 1 = 0$

$x - y + 1 = 0$

$-x + 2 = 0$, luego $x = 2$

$\therefore CS = \{(2, 3)\}$

Actividades

8. Dada la recta de ecuación $y = 2x - 5$, **di** cuáles de los siguientes puntos son incidentes con ella, sin representarla gráficamente: $A\ (1,1)$, $B\ (3,1)$, $C\ (5, 5)$ y $D\ (1/2,1/3)$.
9. **Determina** el valor de k de modo que el punto $(-1,4)$ pertenezca a la recta $3kx - 5y + 1 = 0$.
10. **Halla**, sin representar, los puntos de la recta de ecuación $2x - 3y = 6$ incidentes con los ejes.

8. RECTAS SECANTES

En el plano, dos rectas son secantes si tienen direcciones distintas, es decir, sus vectores directores no son proporcionales, o lo que es lo mismo, sus pendientes son diferentes.

Al conjunto de todas las rectas secantes a un punto $A = (a_1, a_2)$ se le denomina haz de rectas de centro A. La ecuación de las rectas que forman el haz tiene la forma:

$$y - a_2 = m\,(x - a_1),\ \text{donde } m \in \mathbb{R}$$

Un caso particular de las rectas secantes son las rectas perpendiculares, que forman un ángulo de 90°.

Si las rectas $r: Ax + By + C = 0$ y $s: A'x + B'y + C' = 0$ son perpendiculares, sus vectores directores también lo serán y su producto escalar se anulará: $r \perp s \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0$

Si expresamos los vectores directores a partir de las variables de la ecuación general y desarrollamos el producto escalar, se obtiene que las pendientes de dos rectas perpendiculares cumplen:

Para: $r: Ax + By + C = 0,\ m_r = -\dfrac{A}{B}$

$s: A'x + B'y + C',\ m_s = -\dfrac{A'}{B'}$ $\longrightarrow$ $m_r = -\dfrac{1}{m_s} \Leftrightarrow \dfrac{-A}{B} = -\dfrac{1}{-\dfrac{A'}{B'}} \Leftrightarrow -\dfrac{A}{B} = \dfrac{B'}{A'}$

Condición de rectas secantes

Para saber si dos rectas son secantes, podemos fijarnos en sus coeficientes o resolver el sistema de ecuaciones que forman.

Sean $r: Ax + By + C = 0$ y $s: A'x + B'y + C' = 0$ dos rectas cualesquiera.

— Si $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$, las rectas son secantes.

— Si el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas tiene solución (es compatible), las rectas son secantes y la solución es el punto de corte.

Ejemplo 8

Indiquemos si los siguientes pares de rectas son secantes; en tal caso, calculemos el punto común y el haz de rectas con centro en dicho punto:

a. $r: -x + 2y + 5 = 0 \quad s: y = 2x + 1$

b. $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} \quad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases}$

Comprensión: En ambos casos compararemos las pendientes de las rectas y, si son secantes, resolveremos el sistema.

Resolución:

a. $\vec{u}_r = (-2, -1) \Rightarrow m_r = 1/2$, además $m_s = 2$.

Como las pendientes son distintas, las rectas son secantes.

Para obtener el punto común, resolvemos el sistema que forman las ecuaciones de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} -x + 2y + 5 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \longrightarrow x = -\frac{7}{3};\ y = -\frac{11}{3}$$

Punto de corte: $(-7/3, -11/3)$

Haz de rectas secantes: $y + 11/3 = m\,(x + 7/3)$

b. $\vec{u}_r = (2, -1)$ y $\vec{u}_s = (1, 2)$

Las expresamos en forma general y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ \underline{4x - 2y = 2} \\ 5x \quad\ = 2 \end{array}$$

$x = 2/5 \qquad y = -1/5$

Punto de corte: $(2/5, -1/5)$

Haz de rectas: $y + 2/5 = m\,(x - 1/5)$

9. HACES DE RECTAS

Para determinar una recta necesitamos un punto y un vector director.

Con uno solo de estos elementos la recta no queda determinada: hay **infinitas** rectas que pasan por un punto, así como infinitas rectas con una dirección dada.

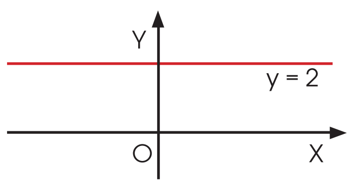
En el primer caso, diremos que las rectas forman un haz de rectas secantes; y en el segundo, un haz de rectas paralelas.

Y TAMBIÉN: ¿?

Rectas paralelas al eje OX
Puesto que la ecuación del eje OX es $y = 0$, cualquier recta paralela al eje OX tendrá por ecuación:

$$y + k = 0, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

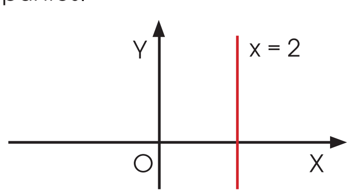
El valor de k vendrá determinado por la ordenada de sus puntos.



Rectas paralelas al eje OY
Puesto que la ecuación del eje OY es $x = 0$, cualquier recta paralela al eje OY tendrá por ecuación:

$$x + k = 0, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

El valor de k vendrá determinado por la abscisa de sus puntos.



Ecuación de un haz de rectas secantes

Sea $A = (a_1, a_2)$ el punto por el que pasan todas las rectas del haz. Este punto se denomina vértice del haz.

La ecuación de una recta cualquiera que pase por A es:

$$y - a_2 = m\,(x - a_1) \text{ con } m \in \mathbb{R}$$

Al variar el valor de m, obtenemos las diferentes rectas que pasan por A.

Así, por ejemplo, la ecuación del haz de rectas secantes de vértice el punto $A = (-1, 5)$ es:

$$y - 5 = m\,(x + 1)$$

Ecuación de un haz de rectas paralelas

Hemos visto que si $Ax + By + C = 0$ es la ecuación general de la recta r, cualquier recta paralela ha de tener los coeficientes de x e y proporcionales a A y B, respectivamente. Por tanto, su ecuación será:

$aAx + aBy + C' = 0$ o, equivalentemente, si dividimos esta ecuación por a y hacemos

$$Ax + By + k = 0, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Al variar el valor de k, obtenemos las diferentes rectas paralelas a r.

Así, por ejemplo, la ecuación del haz de rectas paralelas a la recta $r\colon 2x - 3y + 5 = 0$ es:

$$2x - 3y + k = 0$$

Ejemplo 9

Escribir la ecuación de la recta paralela a $r\colon x - 2\,y + 3 = 0$ y que pasa por el punto de coordenadas $(-1, 3)$.

Solución

La ecuación del haz de rectas paralelas a r es $x - 2y + k = 0$.

Si la recta ha de pasar por $(-1, 3)$, debe cumplirse:

$$-1 - 2\,x^3 + k = 0 \rightarrow -7 + k = 0 \rightarrow k = 7$$

Por tanto, la ecuación de la recta paralela buscada es:

$$x - 2y + 7 = 0$$

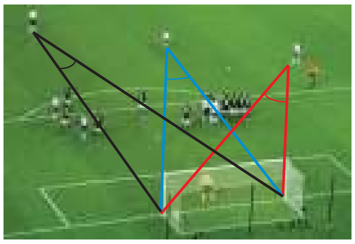
Y TAMBIÉN: ¿?

Para calcular el ángulo que forman dos rectas, usamos la fórmula del producto escalar o la fórmula de la tangente de la diferencia de sus ángulos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \ \operatorname{tg}\beta}$$

Podemos utilizar el ángulo entre dos rectas para calcular los ángulos de un disparo a portería:



Busca información en Internet sobre este problema. http://goo.gl/D0FCmA

Al calcular el ángulo, tomamos valores absolutos porque buscamos un ángulo agudo.

10. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Dos rectas secantes determinan cuatro ángulos iguales dos a dos.

El ángulo entre dos rectas es el menor ángulo que determinan y que coincide con el ángulo que forman sus vectores directores.

Según la definición, si las rectas no son perpendiculares, el ángulo que forman es agudo. En el caso de que las rectas sean coincidentes, el ángulo será de 0˚. Para calcular el ángulo entre dos rectas, podemos hacerlo a partir de sus vectores directores y de sus pendientes.

Ángulo entre dos rectas a partir de sus vectores directores

Si a es el ángulo formado por dos rectas r y s con vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, respectivamente, se verifica:

$$\cos\alpha = |\cos\alpha| = \left|\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right|$$

Ángulo entre dos rectas a partir de su pendiente

Consideramos ahora las rectas r y s de la figura. **Fíjate** en que el ángulo que forman es $\delta = \alpha - \beta$ y que las pendientes están relacionadas con el ángulo de la forma

$m = \operatorname{tg}\alpha$ y $m' = \operatorname{tg}\beta$:

En este caso:

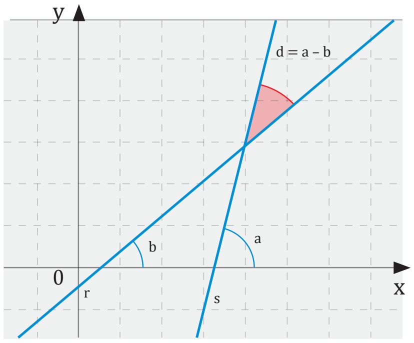


figura 3

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \left|\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \ \operatorname{tg}\beta}\right| = \left|\frac{m - m'}{1 + m\,m'}\right|$$

Ejemplo 10

Calcula el ángulo entre las siguientes rectas: r: 4x - y + 2 = 0 y s: y - 3 = 2 (x + 1).

Comprensión: Buscaremos el ángulo que forman usando los dos métodos estudiados. Para ello, calcularemos los vectores directores y las pendientes.

Resolución: El vector director de r es: $\vec{u}_r(-B, A) = (1, 4)$. Así, $m_r = 4$.

La pendiente de *s* es $m_s = 2$. Así, un vector director puede ser $\vec{v}_s = (1, 2)$.

Método 1: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{|1 \cdot 1 + 4 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{85}} \longrightarrow \alpha = \text{arc cos}\dfrac{9}{\sqrt{85}} = 12° 31'$

Método 2: $\operatorname{tg}\delta = \left|\dfrac{4 - 2}{1 + 4 \cdot 2}\right| = \dfrac{2}{9} \longrightarrow \delta = \text{arc tg}\dfrac{2}{9} = 12° 31'$

Comprobación: El resultado es correcto, pues con los dos métodos hemos obtenido el mismo resultado.

II. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos del plano se define de forma natural como la longitud del segmento que determinan.

Sin embargo, esta noción de distancia no es suficiente para determinar la que existe entre un punto y una recta o entre dos rectas paralelas, pues, en estos casos, hay infinidad de puntos implicados en el cálculo y deberemos saber cuál escoger.

> La distancia entre dos elementos del plano es la mínima distancia que existe entre sus puntos..

Distancia entre dos puntos

Observa los puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ de la figura.

La distancia entre ellos es la longitud de la hipotenusa del triángulo EPQ. Por lo tanto:

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

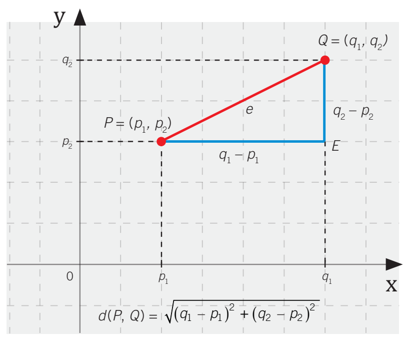


figura 5

Simétrico de un punto P respecto de otro punto Q

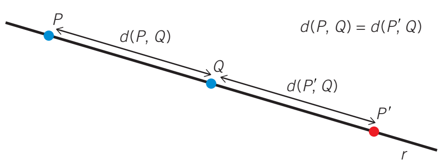


figura 6

La distancia entre dos puntos nos servirá para determinar el punto simétrico de un punto respecto a otro.

El simétrico de P respecto de Q es el punto P' de la recta r que pasa por P y Q, tal que:

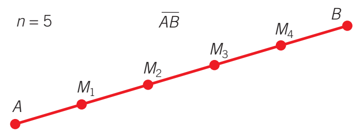
$$d(P, Q) = d(P', Q)$$

Por lo tanto, Q es el punto medio del segmento determinado por P y P'.

Y TAMBIÉN:

Para dividir un segmento $\overline{AB}$ en n partes iguales, los $n - 1$ puntos de división $(M_1, M_2, ..., M_{n-1})$ se obtienen imponiendo:

$$\overline{AM_i} = \frac{i}{n}\overline{AB}, \; i = 1, ..., n$$



Por ejemplo, si n = 5:

$$\overline{AM_1} = \frac{1}{5}\overline{AB} \qquad \overline{AM_2} = \frac{2}{5}\overline{AB}$$

$$\overline{AM_3} = \frac{3}{5}\overline{AB} \qquad \overline{AM_4} = \frac{4}{5}\overline{AB}$$

Si P y Q son dos puntos del plano:

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$$

TIC

En el siguiente enlace encontrarás un applet de GeoGebra relacionado con el concepto de punto simétrico:

http://links.edebe.com/g4havy

— Investiga cómo se ha creado este applet e intenta crear uno parecido fijando otro elemento del plano.

Ejemplo 11

Demuestra que el triángulo de vértices $A = (2, -1)$, $B = (7, 2)$ y $C = (3, 3)$ es isósceles.

Comprensión: Calculemos las distancias entre los vértices. Si dos son iguales y otra es diferente, el triángulo es isósceles.

Resolución:

$$d(A, B) = \sqrt{(7-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(3-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

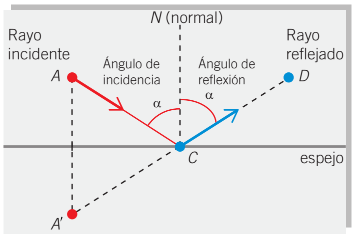
$$d(B, C) = \sqrt{(3-7)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

Por lo tanto, el triángulo es isósceles.

Comprobación: Si representamos el triángulo con un programa gráfico, comprobaremos que, efectivamente, es isósceles.

Y TAMBIÉN: ¿?

Fuente luminosa puntual en un espejo plano:



A′, C y D (punto del rayo reflejado) están alineados.

12. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Según la definición de distancia, entre dos elementos del plano, esta debe ser mínima. Así, la distancia entre un punto y una recta estará relacionada con la perpendicular a esta que pase por el punto:

$$d(P, r) = d(P, H)$$

donde H es el pie de la perpendicular de P sobre r.

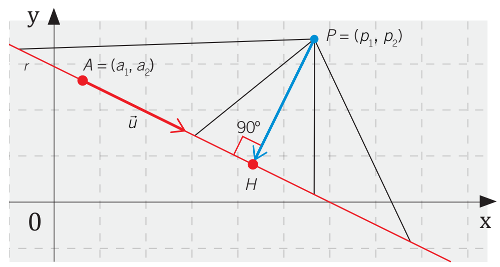


figura 7

Ejemplo 12

Calcula la distancia del punto $P = (5, 2)$ a la recta r que pasa por el punto $A = (2, -3)$, y tiene vector director $\vec{u} = (1, 4)$.

Comprensión: Buscaremos un vector normal a la recta r y, a partir de él, hallaremos la recta s perpendicular a la anterior que pase por P. Determinaremos el punto de intersección de ambas rectas H y aplicaremos la definición de distancia entre dos puntos: $d(P, H)$.

Resolución: Escribimos la ecuación de r en la forma paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= -3 + 4t \end{aligned}\right\}$$

El vector director de s debe ser normal a la recta r. Si $\vec{u} = (1, 4)$ es el vector director de r, el vector $\vec{v} = (-4, 1)$ será un vector perpendicular; por lo tanto, podemos considerar que es el vector que buscamos.

Escribimos la recta s en su forma general (implícita):

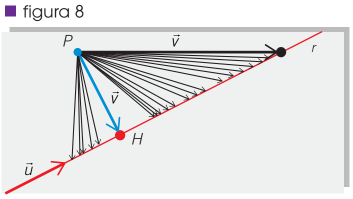
$$\frac{x - 5}{-4} = \frac{y - 2}{1} \rightarrow x + 4y - 13 = 0$$

Para calcular $H = r \cap s$, sustituimos las expresiones de la ecuación de r en la ecuación general de s:

$$2 + t + 4(-3 + 4t) - 13 = 0 \rightarrow t = \frac{23}{17} \rightarrow H\left(2 + \frac{23}{17}, -3 + 4 \cdot \frac{23}{17}\right) = \left(\frac{57}{17}, \frac{41}{17}\right)$$

Por lo tanto: $d(P, r) = d(P, H) = \sqrt{\left(\frac{57}{17} - 5\right)^2 + \left(\frac{41}{17} - 2\right)^2} = \frac{7\sqrt{17}}{17}$

figura 8



H es el punto de r que se encuentra a menor distancia de P.

Simétrico de un punto P respecto de una recta r

El simétrico de P respecto de r es el punto P′, tal que:

$$d(P, H) = d(P', H)$$

Por lo tanto, H es el pie de la perpendicular de P sobre r.

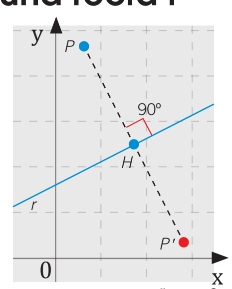


figura 9

13. CÁLCULO DIRECTO DE LA DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Si consideramos el punto $P = (p_1, p_2)$ exterior a la recta r de ecuación general $Ax + By + C = 0$, no es necesario calcular el punto de intersección entre r y una perpendicular que pase por P, pues podemos calcular directamente la distancia de P a la recta r a partir de la fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Veamos la demostración de esta igualdad.

Sea P un punto exterior a la recta, $A = (a_1, a_2)$ un punto cualquiera de la recta r y $\vec{n} = (A, B)$ un vector perpendicular a r. La distancia de P a r es la mínima entre ambos elementos: $d\,(P, r) = d\,(P, H) = |\overrightarrow{PH}|$. Por ser PHA un triángulo rectángulo, se cumple:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{PH}|}{|\overrightarrow{PA}|} \Rightarrow |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{PA}| \cdot \cos\alpha$$

Aplicando la definición de producto escalar de vectores:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{PA}|\,|\vec{n}| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{PA}|\,|\vec{n}|}$$

Sustituimos en la primera fórmula la expresión de cos α obtenida en la segunda:

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PH}| = \cancel{|\overrightarrow{PA}|} \cdot \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}}{\cancel{|\overrightarrow{PA}|}\,|\vec{n}|} = \frac{|(p_1 - a_1, p_2 - a_2) \cdot (A, B)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|(p_1 - a_1) \cdot A + (p_2 - a_2) \cdot B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ap_x + Bp_y - a_1A - a_2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Como $A = (a_1, a_2) \in r$, entonces $A\,a_1 + B\,a_2 + C = 0 \quad 1 \quad C = -A\,a_1 - B\,a_2$.

$$d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

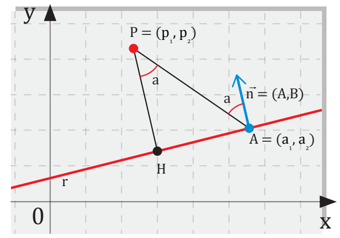


figura 10

Distancia de un punto a una recta.

TIC

En la siguiente página web, encontrarás una gran variedad de actividades para practicar y ampliar los conocimientos de geometría métrica:

http://links.edebe.com/v796

Y TAMBIÉN:

Al ser α un ángulo agudo, se cumplirá que $\cos\alpha > 0$ y podremos definir el ángulo como:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\vec{n}|}$$

Actividades

11. En la siguiente página web encontrarás la demostración de la fórmula de la distancia de una recta a un punto: http://links.edebe.com/adj ¿Qué diferencias hay entre la demostración que has estudiado en la unidad y la que se muestra en esta página?

12. Dadas las siguientes rectas:

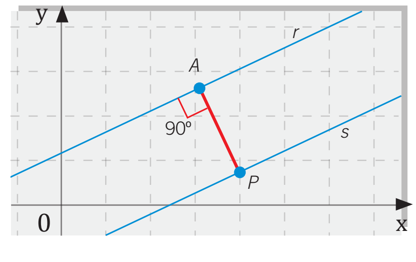
$$r: \frac{x - 2}{3} = \frac{y + 2}{4} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 4 + k \\ y = k \end{array}\right\}$$

—**Determina** la distancia del punto de corte entre r y s con la recta $-4x - y = 4$.

14. DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS

Dos rectas son paralelas si tienen vectores directores con la misma dirección. También en ellas se cumple que las pendientes son iguales.

La distancia entre dos rectas paralelas r y s es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta, es decir:



Distancia entre rectas paralelas: d(s, r) = d(P, r).

$r \parallel s \rightarrow d(r, s) = d(P, r) = d(A, s)$, siendo $A \in r$ o $P \in s$

Si aplicamos la definición:

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

y definimos C' como el término independiente de la recta paralela s, se verifica que $C' = -A\,p_1 - B\,p_2$, pues p pertenece a la recta; entonces, podemos escribir:

$$d(P, r) = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo 13

Calculemos la distancia entre las rectas $r: 2x - y + 3 = 0$ y $s: 4x - 2y + 1 = 0$.

Comprensión: Las rectas r y s son paralelas. Por lo tanto, tomaremos, por ejemplo, un punto P de s y calcularemos $d(P, r)$.

Resolución: Si $y = 0 \rightarrow 4x + 1 = 0 \rightarrow x = -1/4$, con lo cual $P(-1/4, 0)$.

$$d(r, s) = d(P, r) = \frac{|2 \cdot (-1/4) - 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Distancia al origen de coordenadas

La distancia de una recta al origen de coordenadas está dada por:

$$d(O, r) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo 14

Hallemos la distancia al origen de la recta $s = 4x - 3y - 20 = 0$.

$$d(O, r) = \frac{|-20|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{20}{\sqrt{\sqrt{16 + 9}}} = \frac{20}{5} = 4$$

Actividades

13. **Calcula** la distancia entre las siguientes rectas:

$$r = \left.\begin{matrix} x = -3t \\ y = 1 + 2t \end{matrix}\right\} \quad s: \frac{x - 1}{6} = \frac{y + 1}{-4}$$

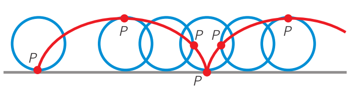
14. **Halla** el valor de k para que la distancia del punto $P = (3, k)$ a la recta $r: -2x + 4y - 1 = 0$ sea de 4 unidades.

15. LUGARES GEOMÉTRICOS. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

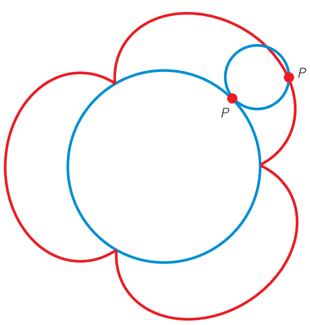
Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad geométrica. Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro es una circunferencia.

Y TAMBIÉN: ¿?

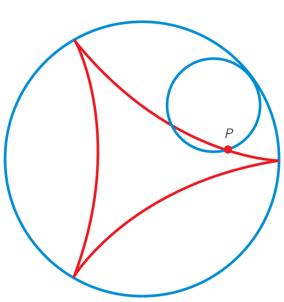
Cicloide.
Lugar geométrico de las posiciones de un punto de una circunferencia que rueda.



Epicicloide.
Lugar geométrico de la trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda sobre otra circunferencia.



Hipocicloide.
Lugar geométrico descrito por un punto situado sobre una circunferencia que rueda por el interior de otra circunferencia.



Si trazas la perpendicular a un segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio, puedes comprobar con un compás que todos sus puntos están a la misma distancia de A y B. Esta recta es la mediatriz.

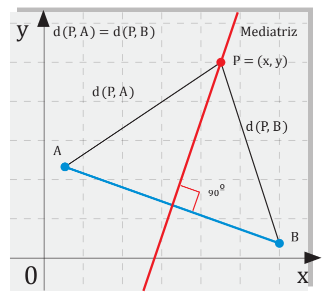
> La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Para calcular la mediatriz, existen dos métodos:

Método 1: Igualamos la expresión de las distancias entre los extremos del segmento y un punto cualquiera.

Método 2: Hallemos la ecuación de la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pase por su punto medio.

figura 12



Ejemplo 15

Calculemos, utilizando los dos métodos, la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A = (2, -3)$ y $B = (0, 1)$.

Comprensión: Calcularemos la expresión de la mediatriz primero igualando la expresión de las distancias a un punto cualquiera del plano, y después hallando la expresión de la recta perpendicular que pase por el punto medio del segmento.

Resolución:

Método 1: Todo punto $P(x, y)$ que pertenezca a la mediatriz cumple:

$$d(P, A) = d(P, B)$$

Desarrollamos analíticamente esta expresión:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = x^2 + (y-1)^2 \rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \rightarrow -4x + 4 + 6y + 9 = -2y + 1 \rightarrow$$

$$-4x + 8y + 12 = 0; \text{ si simplificamos: } -x + 2y + 3 = 0$$

Método 2: Buscamos un vector $\vec{n}$ perpendicular al segmento por su punto medio M, y hallemos la expresión de la recta cuyo vector director sea $\vec{n}$ y pase por el punto M:

$$\overrightarrow{AB} = (2-0, -3-1) = (2, -4) \qquad \vec{n} = (4, 2) \qquad M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (1, -1)$$

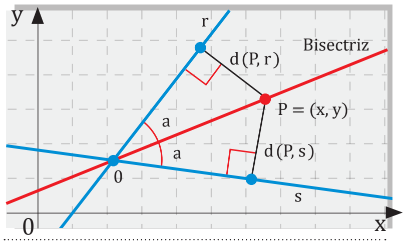
Por lo tanto, la ecuación de la mediatriz es:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} \rightarrow 2 \cdot (x-1) = 4 \cdot (y+1) \rightarrow -2x + 4y + 6 = 0 \rightarrow$$

$$-x + 2y + 3 = 0$$

Comprobación: Observemos que con los dos métodos hemos obtenido la misma ecuación.

■ figura 13



Bisectriz de un ángulo.

16. BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Dado un ángulo cualquiera, la recta que lo divide en dos ángulos iguales es la bisectriz.

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas que determinan el ángulo.

Recuerda que dos rectas secantes definen dos ángulos iguales dos a dos y que, por lo tanto, al efectuar los cálculos obtendremos dos bisectrices que, como en el caso de la mediatriz, se pueden calcular de dos formas distintas:

Método 1: Igualar la expresión de las distancias entre un punto, el plano y las rectas que determinan el ángulo.

Método 2: Las bisectrices pasan por el punto de intersección entre las rectas que definen los ángulos, y sus vectores directores son la suma y la resta respectivamente de los vectores unitarios de la misma dirección que dichas rectas.

Y TAMBIÉN: ¿?

La igualdad entre dos valores absolutos equivale a dos opciones, es decir:

$$|a| = |b| \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

Ejemplo 16

Calcula las bisectrices de las rectas $r: 3x + y - 1 = 0$ y $s: 2x - 3y + 5 = 0$.

Comprensión: Calcularemos la expresión de la bisectriz igualando la expresión de las distancias de las rectas a un punto cualquiera del plano.

Resolución:

Un punto $P(x, y)$ pertenece a las bisectrices si:

$$d(P,r) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|3x + y - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|2x - 3y + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

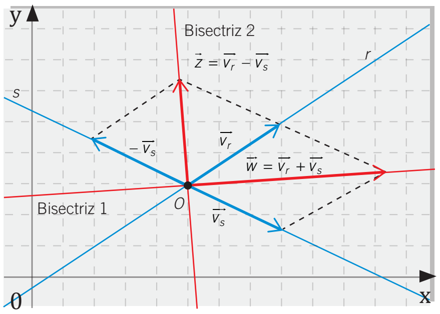
Como dos rectas determinan cuatro ángulos, para determinar las dos bisectrices deberemos tener en cuenta los dos signos de las raíces del denominador. Así, si denominamos t_1 y t_2 a las bisectrices, obtenemos dos ecuaciones:

$$t_1: \sqrt{13}\,(3x + y - 1) = \sqrt{10}\,(2x - 3y + 5)$$
$$t_2: \sqrt{13}\,(3x + y - 1) = -\sqrt{10}\,(2x - 3y + 5)$$

Si desarrollamos la ecuación y extraemos factores de la raíz, obtenemos las ecuaciones de las dos bisectrices:

$$t_1: (3\sqrt{13} - 2\sqrt{10})x + (\sqrt{13} + 3\sqrt{10})y - (\sqrt{13} + 5\sqrt{10}) = 0$$
$$t_2: (3\sqrt{13} + 2\sqrt{10})x + (\sqrt{13} - 3\sqrt{10})y - (\sqrt{13} - 5\sqrt{10}) = 0$$

Comprobación: Para comprobar que el resultado es correcto, podemos utilizar el segundo método y ver que el resultado es el mismo. Ten en cuenta que para realizar este método deberás obtener el vector director de cada una de las bisectrices, a partir de la suma y la resta de los vectores directores de las rectas secantes.



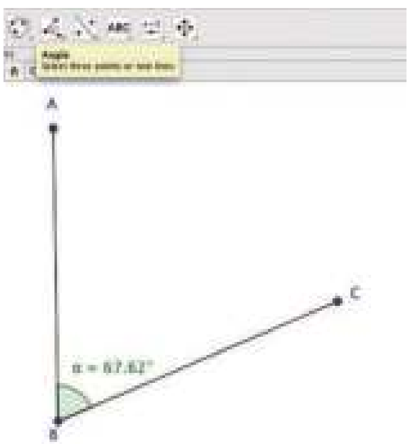
17. MATEMÁTICAS Y TIC`S. GEOGEBRA

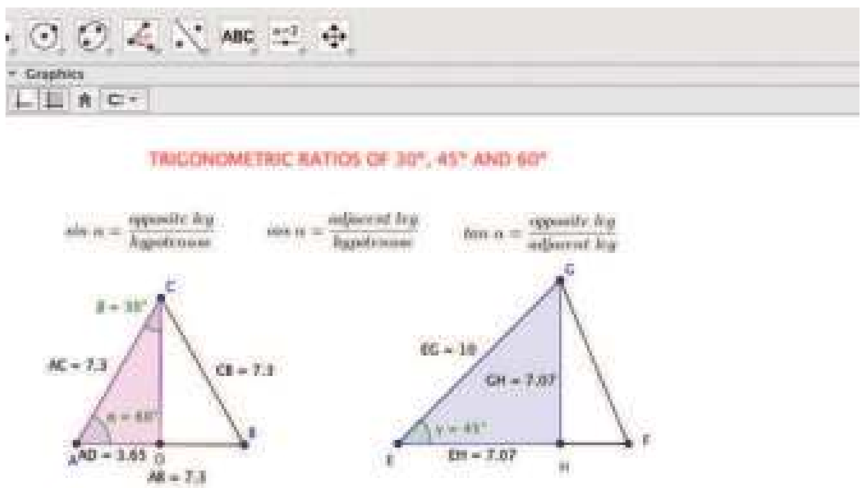
GeoGebra permite tratar la trigonometría de una forma dinámica. Podemos utilizar las pantallas de Vista Algebraica (Algebra) y Vista Gráfica (Graphics). Además, con la opción Deslizador (*Slider*) es posible obtener distintos valores de un ángulo para determinar los valores de sus razones trigonométricas.

Trigonometría

La amplitud de un ángulo (en sentido antihorario; es decir, C, B, A) puede obtenerse a partir de tres puntos que determinan dos rectas en el plano. Podemos utilizar el icono para dibujar los puntos y para marcar los segmentos. Al mover los puntos con se observa que el valor del ángulo va variando según la nueva amplitud.

En esta imagen se muestran las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°. Al mover los puntos A, B y D, G de cada triángulo se puede observar que el valor de las razones trigonométricas no varía, aunque cambie el tamaño del triángulo.





Para determinar las razones trigonométricas, se sigue este proceso:

—Dibujamos dos puntos, en este caso, A, B y E, F.

—Dibujamos el tercer punto con la amplitud del ángulo que se desee.

—Unimos los tres puntos para obtener el triángulo deseado.

—Trazamos la perpendicular desde el punto C o G al lado opuesto del triángulo para conseguir un triángulo rectángulo.

—Determinamos el punto de intersección de dicha perpendicular con el lado del triángulo.

—Determinamos el valor de la longitud de los lados.

Para estudiar las razones del ángulo de 90°, puede utilizarse la circunferencia goniométrica. Al mover el deslizador se obtienen las razones trigonométricas de los ángulos hasta 360°.

Vectores en el plano

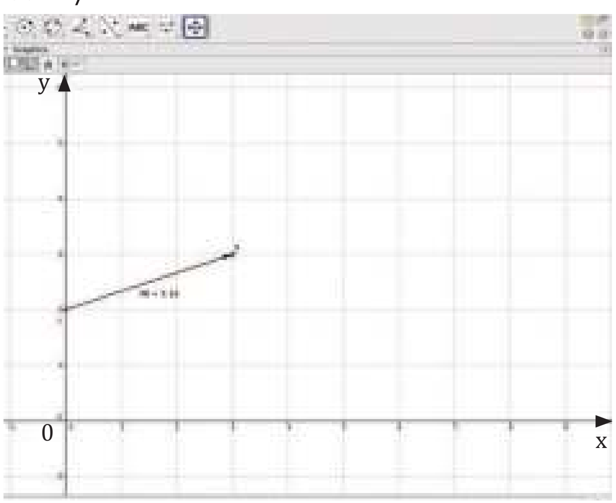
Un vector es un segmento orientado. Tiene módulo, dirección y sentido.

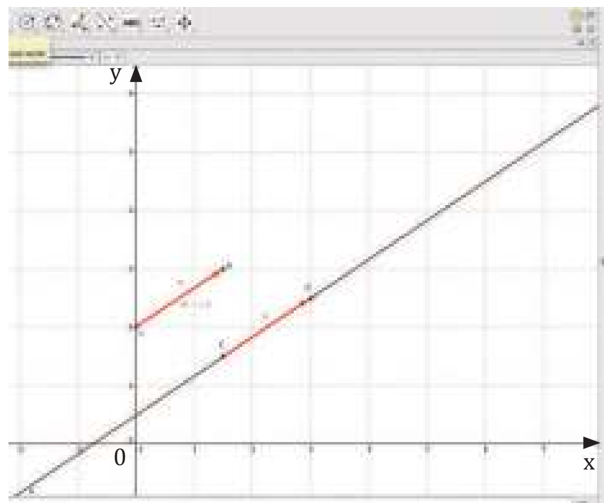
Con GeoGebra podemos trazar vectores a partir de dos iconos:

En la pantalla algebraica aparecen las coordenadas de los puntos origen y extremo, sus componentes y el valor de su módulo. Al mover los puntos A y B, se muestran nuevos vectores con sus correspondientes características. El sentido del vector viene determinado por el orden en que se clican los puntos A y B.

También podemos dibujar cualquier recta paralela a un vector.

En la ventana algebraica se visualiza la ecuación implícita de la recta. Al mover A y B, aparecen nuevas rectas paralelas.

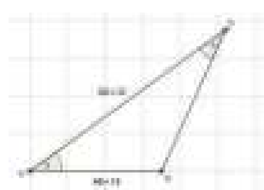




Actividades

Utiliza el programa GeoGebra para resolver las siguientes actividades:

15. **Calcula** el área de este triángulo:



16. Con los puntos $A\ (-2, 4)$, $B\ (1, 6)$, $C\ (5, 0)$ y $D\ (3, -8)$ se forma un cuadrilátero regular.

17. **Comprueba** gráfica y vectorialmente que con los puntos medios de cada lado se forma un paralelogramo.

$$\left.\begin{array}{l} -3x + 4y = 16 \\ 2x + 3y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 4 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M = (0,4)$$

18. **Determina** gráficamente la ecuación explícita de la recta r en cada caso:

    a. Pasa por el punto $A\ (2, 0)$ y tiene como dirección el vector $\vec{u} = (1, 2)$.

    b. Pasa por los puntos $A\ (4, 2)$ y $B\ (1, 4)$.

    c. Corta a los ejes de coordenadas en los puntos $P\ (0, 5)$ y $Q\ (2, 0)$.

    —**Halla** las ecuaciones paramétricas, la vectorial y la general de dichas rectas.

A

Halla las ecuaciones de los lados de un triángulo, conocido uno de sus vértices $C = (3, 2)$ y las ecuaciones de la altura $r: 3x - 2y = -14$ y de la mediana $s: -3x + 4y = 16$, trazadas desde un mismo vértice.

Solución

Comprensión: Uno de los vértices, por ejemplo B, será la intersección de r y s, con lo que ya podemos calcular el lado $\overline{BC}$. Otro lado estará sobre la recta t que pasa por C y es perpendicular a la altura r. Para calcular el vértice A, hallaremos el punto de intersección de la recta t con la mediana s; este punto será el punto medio entre C y A.

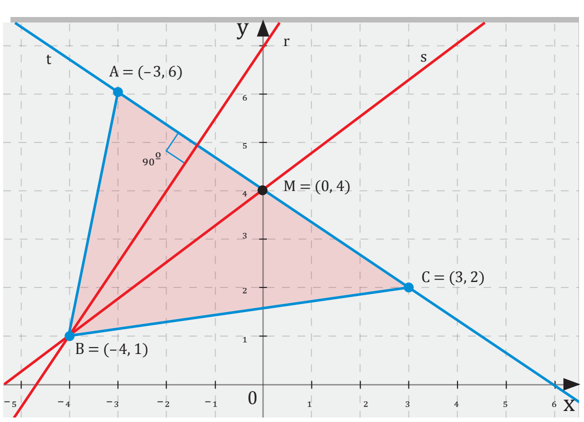
Datos: Un vértice del triángulo y la altura y la mediana de otro vértice.

Resolución: Intenta resolver el problema tú solo. Para ello oculta la respuesta y sigue estos pasos.

Pasos

1. Calculemos la intersección de las rectas *r* y *s*. El punto obtenido será el vértice.
2. Obtendremos la recta t que pasa por $C = (3, 2)$ y es perpendicular a la altura $r: 3x - 2y = -14$.

   El vector normal a $r: 3x - 2y + 14 = 0$ será el vector director de la recta t que buscamos.
3. Calculemos el punto de intersección de la recta t con la mediana. La solución M será el punto medio entre C y A.
4. Calculemos A sabiendo que M es el punto medio de C y *A*.
5. La recta calculada t es la ecuación del lado $\overline{CA}$. Las otras dos serán las que pasan por $\overline{AB}$ y por $\overline{BC}$.



Respuesta

1. $\left.\begin{aligned} -3x + 4y &= 16 \\ 3x - 2y &= -14 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B = (-4, 1)$
2. El vector normal a r es: $(3, -2)$. La pendiente de t será: $m = -2 / 3$. La ecuación de la recta que pasa por C será:

   $$t: y - 2 = (-2 / 3)\ (x - 3) \ \rightarrow \ t: 2x + 3y - 12 = 0$$
3. $\left.\begin{aligned} -3x + 4y &= 16 \\ 2x + 3y &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 4 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M = (0, 4)$
4. Si $A = (a1, a2)$, se cumple que:

   $$M = (0, 4) = \left(\frac{a_1 + 3}{2}, \frac{a_2 + 2}{2}\right)$$

   $$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{a_1 + 3}{2} \\ 4 &= \frac{a_2 + 2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= -3 \\ a_2 &= 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = (-3, 6)$$

   a. La recta que pasa por $A = (-3, 6)$ y $B = (-4, 1)$ es: $\overrightarrow{AB} = (-1, -5) \Rightarrow \vec{u}_{AB} = (1, 5) \Rightarrow m = 5/1 = 5$ L a recta en forma explícita es $y = 5x + n$. Para calcular *n*, imponemos que pase por $A = (-3, 6)$ $6 = -15 + n \ \rightarrow \ n = 21$ La recta determinada por el segmento $\overline{AB}$ es $y = 5x + 21$.

   b. La recta que pasa por $B = (-4, 1)$ y $C = (3, 2) \rightarrow$ $\overrightarrow{BC} = (7, 1)$ es el vector director de la recta.

   Ecuación del lado $\overline{BC}$: $\dfrac{x + 4}{7} = \dfrac{y - 1}{1}$

1 Ecuaciones de la recta

1. **Halla**:
   a. La ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P = (0,\text{-}\ 3)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (2,3)$.
   b. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $A = (5, \text{-}1)$ y $B = (1, 1)$.

2. **Encuentra** un punto y un vector director de las siguientes rectas:
   a. $r: \left.\begin{matrix} x = \text{-}\ 3 + 2t \\ y = \text{-}t \end{matrix}\right\}$
   b. $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y + 1}{4}$
   c. $x = 2$

3. **Calcula** la ecuación de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:
   a. $P = (1, 0)$ y $Q = (0, 3)$
   b. $P = (5, 2)$ y $Q = (1, \text{-}\ 4)$

4. **Calcula** las diagonales de la figura ABCDE cuyos vértices son $A = (\text{-}3, 3)$, $B = (0, 6)$, $C = (4, 4)$, $D = (2, 0)$ y $E = (\text{-}2,0)$.

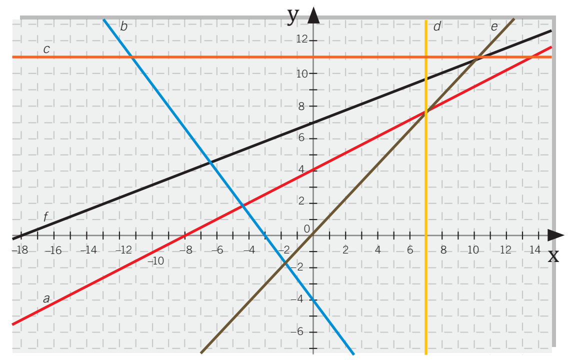
5. **Halla** la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto $A = (1, 3)$ y es perpendicular a la recta s: $2x + 3y = 0$.

6. **Calcula** un vector y un punto de las siguientes rectas:
   a. La rectas que forman cada uno de los ejes de coordenadas.
   b. Las rectas que forman las bisectrices del 1.er y 3.er cuadrante y del 2.do y 4.to cuadrante.

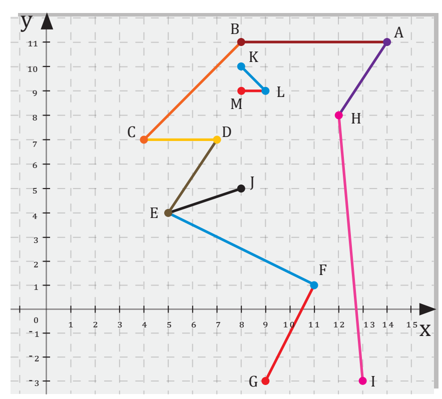
7. **Calcula** las ecuaciones de los lados y las medianas del triángulo cuyos vértices están situados en los puntos $A = (\text{-}\ 2, 3)$, $B = (4, 5)$ y $C = (4, \text{-}\ 2)$.

8. Por el punto $A = (\text{-}3, 4)$ se traza una recta que corta al eje de abscisas y al eje de ordenadas, de modo que los segmentos determinados con el origen de coordenadas tienen la misma longitud. **Halla** la ecuación de dicha recta. **Comprueba** el resultado con un programa de representaciones gráficas.

9. **Halla** la ecuación de las siguientes rectas:



10. **Calcula** la ecuación de cada una de las rectas que determinan la siguiente figura:



11. **Halla** la recta que pasa por el punto $P = (2, 2)$ y forma con los semiejes positivos un triángulo de área 9 unidades.

12. Los vértices de un triángulo son $A = (\text{-}3, 6)$, $B = (13, 8)$ y $C = (3, \text{-}2)$. **Calcula** el punto de intersección entre la recta *r* que pasa por A y es paralela al lado BC y la recta s que pasa por B y es perpendicular a r.

13. Para regar los árboles de un parque, se van a colocar puntos de riego próximos a ellos. Si tres de los puntos estarán situados en $A = (2, 3)$, $B = (5, \text{-}1)$ y $C = (6{,}5; \text{-}3)$, ¿es posible unirlos con una única tubería recta? **Divide** el segmento determinado por $A= (9, 1)$ y $B = (15, 3)$ en tres partes iguales. **Indica** las coordenadas de los puntos de división.

14. Las diagonales de un rombo se cortan en el punto $Q = (8, 7)$. La ecuación general de uno de los lados es $\text{-}x+ 2y\text{-}16 = 0$ y la de una de las diagonales es $3x + 4y \text{-}52 = 0$. **Halla** las coordenadas de los vértices del rombo.

15. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $M_A = (3, 7)$, $M_B = (12, 10)$ y $M_C = (7, -3)$. **Halla** los vértices del triángulo ABC y las ecuaciones de sus lados en forma paramétrica.

16. Entre las rectas que pasan por $A = (0,2)$, **halla** una de modo que A sea el punto medio del segmento de dicha recta comprendido entre las rectas de ecuación: $5x - y + 16 = 0$ y $-x + 3y = -8$.

2 Posición relativa de dos rectas

17. **Calcula** el valor de n para que las siguientes rectas r: $2x - 3y + 5 = 0$ y s: $x + 3n + 1 = y$ n sean paralelas.

18. **Indica** la posición relativa entre los siguientes pares de rectas. Si son secantes, **calcula** el punto de intersección.

a. $r: \left.\begin{matrix} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \end{matrix}\right\}$ $\quad s: \dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-3}{1}$

b. $r: 3x - 2y + 1 = 0$ $\quad s: y = -3x + 2$

c. $r: y - 2 = -7(x + 1)$ $\quad s: 7x + y + 1 = 0$

d. $r: \left.\begin{matrix} x = 2 + t \\ y = -1 - t \end{matrix}\right\}$ $\quad s: \left.\begin{matrix} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{matrix}\right\}$

19. **Calcula** el valor de k para que las siguientes rectas sean paralelas: $r: 2x - 3y + 5 = 0$ y $s: 7x + ky + 2 = 0$.

20. En un radar se observa la trayectoria de dos submarinos. Uno de ellos se encuentra en el punto de coordenadas $(2, 5)$ y se desplaza siguiendo la dirección del vector $\vec{u} = (-3,4)$. La trayectoria del segundo queda determinada por la recta de ecuación $4x + 3y - 10 = 0$. Si continúan avanzando de forma indefinida, ¿chocarán en algún momento?

21. En la siguiente página web, encontrarás información sobre las posiciones relativas de las rectas: http://link s.edebe.com/ugj3a. **Explica** cómo determinar, con ejemplos, la posición relativa de dos rectas a partir de sus ecuaciones generales. **Halla** el haz de rectas paralelas a la recta de ecuación canónica: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} = 1$

22. **Calcula** el valor de k para que las siguientes rectas sean perpendiculares: $r: 3x - 5y + 8 = 0$

$$s: \frac{2x-1}{k} = \frac{y+3}{10}$$

23. **Halla** el haz de rectas que pasa por el punto $P = (2, -3)$.

24. **Determina** el ángulo que forman las rectas:

$$r: \left.\begin{matrix} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \end{matrix}\right\}; \quad s: \; y + 2 = -3(x - 1)$$

25. Sean los puntos $A = (2,1)$, $B = (0,3)$ y $C = (4,0)$, **calcula** el ángulo que forman las rectas determinadas por AB y por AC.

26. **Determina** el ángulo que forman las rectas:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2}$$

27. **Halla** la ecuación de la recta que pertenece al haz de rectas determinadas por $r: 2x + 3y - 5 = 0$ y $s: x - y = 0$, y que pasa por el punto $(2, -1)$.

28. En un billar golpeamos la bola A, que debe golpear a la bola B y luego a la C. Considerando los lados de la mesa como ejes de coordenadas, las posiciones de las bolas son: $A = (9, 4)$, $B = (-3, -2)$ y $C = (-1, 4)$. ¿Con qué ángulo, respecto a la trayectoria seguida por A cuando golpea a la bola B debe salir la bola para golpear a la bola C?

29. Dos rectas se cortan en el eje OX, y forman entre sí un ángulo de 45°. La de menor pendiente tiene por ecuación $x + y - 4 = 0$. **Calcula** la ecuación de la otra recta.

30. **Encuentra** las coordenadas del ortocentro, punto en el que se cortan las alturas del triángulo cuyos vértices son $A = (-4, 2)$, $B = (0, 6)$ y $C = (6, -4)$.

31. Dadas las rectas $r: ax + (a - 1)y - 2(a + 2) = 0$ y $s: 3ax - (3a + 1)y - (5a + 4) = 0$, **calcula**:

a. El valor de a para que las rectas sean paralelas.

b. El valor de a para que sean perpendiculares. **Halla** en este caso el punto de corte.

3 Distancias

32. **Calcula** la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a. $P = (2, 0)$ y $Q = (-7, 5)$

b. $R = (-1, 7)$ y $S = (-2, -3)$

33. **Halla** el punto simétrico de $P = (-3, 9)$ respecto del punto $Q = (2, 3)$.

34. **Calcula** la distancia entre el punto $P = (3, -5)$ y la recta que pasa por el punto $Q = (0, 2)$ y es paralela a la recta de ecuación $y = -2x +6$.

35. En una carrera la meta está situada en el punto $M = (32, 12)$. Dos participantes que están situados en los puntos $A = (103, 22)$ y $B = (30, 100)$ salen al mismo tiempo hacia ella. Si se dirigen hacia la meta con la misma velocidad y en línea recta, ¿cuál llegará primero?

36. **Demuestra** que los puntos $A = (0,9)$, $B=(6,4)$, $C = (11,10)$ y $D = (5, 15)$ forman un cuadrado.

37. Sea un cuadrilátero cuyos vértices están en los puntos $A = (3, 3)$, $B = (7, 2)$, $C = (6, 6)$ y $D = (2, 7)$. En grupos, debate qué condiciones geométricas deberían darse para cada uno de los cuadriláteros. A continuación, determina, sin representar los puntos, de qué cuadrilátero se trata y cuál es su área.

38. **Halla** las coordenadas del punto simétrico de $P = (7, 1)$ respecto de la recta s, definida por:

$$s: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

39. **Calcula** los vértices y el área del triángulo formado por las siguientes rectas:

$r : 2x + 3y = 3$

$s : 6x - y = -21$

$t : -2x + 7y = -13$

40. **Calcula** los vértices y el área del polígono determinado por las rectas:

$r : y = 2x - 1$ $\quad$ $s : 2x - y + 3 = 0$

$t : 2x + 3y + 3 = 0$ $\quad$ $u : y = \frac{-2x}{3} + 3$

¿De qué polígono se trata?

41. **Calcula** los vértices del cuadrado en el que uno de los lados viene determinado por los puntos $A = (3, 5)$ y $B = (9, 2)$.

42. **Halla** un punto de la recta $-3x + 5y = 1$ que equidiste de los puntos $P = (-1, 3)$ y $Q = (5, 1)$.

43. Las ecuaciones de dos lados de un cuadrado son $-x + 2y = 1$; $-x + 2y = -14$.

Halla los vértices y las ecuaciones de los otros dos lados, sabiendo que el punto $Q (-1, -5)$ está en uno de los lados de este cuadrado.

44. La recta r tiene como abscisa en el origen -3 y como ordenada en el origen 2. **Calcula** la distancia del punto $C (5, 1)$ a dicha recta. Luego, encuentra la ecuación de la recta s que siendo paralela a r tiene por ordenada en el origen 6.

45. **Resuelve**:

a. **Indica** el camino que debe seguir una bola de billar situada en el punto de coordenadas $A = (-1, 7)$ para llegar al punto $P = (7, 15)$ después de rebotar en una de las bandas de ecuación $- x + 2y = 5$.

b. Un ciclista se encuentra en el punto $A = (3, 7)$ y quiere llegar al punto $B = (18, 5)$ pasando previamente por el eje OX. ¿Qué recorrido debe realizar para que la distancia total del trayecto sea mínima?

46. **Calcula** cuál es el área del cuadrilátero de vértices.

$A = (-3, -1)$, $B = (2, -4)$, $C = (4, 3)$ y $D = (-1, 2)$.

Recomendación: Considera los triángulos ABD y BCD.

47. Dado el cuadrado de vértices $A = (1, 3)$, $B = (5, -1)$, $C = (9, 3)$ y $D = (5, 7)$, se construye el triángulo equilátero ABE. Sea P el punto de intersección de las rectas determinadas por AC y BE, y F el punto simétrico de P respecto de la recta DC. **Demuestra**:

a. El triángulo CEF es equilátero.

b. El triángulo DEF es rectángulo e isósceles.

c. El triángulo BDF es isósceles.

d. El triángulo PDF es equilátero

4 Lugares geométricos

48. **Calcula** el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan 3 unidades del punto $P = (2, -3)$.

49. **Calcula** la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A = (2, 0)$ y $B = (-1, 4)$.

50. **Calcula** las bisectrices de las rectas $r: y = -x - 1$ y $s: x - y = -2$. 2

51. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje Y disminuida en 2 unidades es siempre igual al triple de su distancia al eje X. Halla la ecuación de su lugar geométrico.

52. **Halla** el lugar geométrico de los puntos del plano que forman un triángulo isósceles que tiene una base determinada por los puntos $A = (6, -2)$ y $B = (-1, 3)$.

53. **Halla** el lugar geométrico de los puntos del plano que equidista del punto $P = (-1, 1)$ y de la recta $r: x + y + 1 = 0$.

54. **Halla** el lugar geométrico de los puntos del plano que equidista del punto $P = (-1, 1)$ y de la recta $r: x + y + 1 = 0$.

55. **Calcula** el incentro (punto donde se cortan las bisectrices) del triángulo determinado por los puntos $A = (-7, -3)$, $B = (0, 4)$ y $C = (5, -1)$.

56. **Calcula** el circuncentro (punto donde se cortan las mediatrices) del triángulo determinado por la recta $3x - 4y = 12$ y los puntos de intersección de dicha recta con los ejes de coordenadas.

57. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo producto de distancias a los puntos $A = (2, 6)$ y $B = (1, -2)$ es 1 unidad?

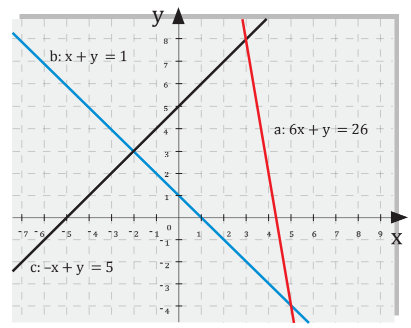
58. Los vértices de un triángulo se sitúan en los puntos $A = (5, 10)$, $B = (-3, 2)$ y $C = (11, 4)$. **Halla** el punto de intersección de la bisectriz del ángulo C y el lado AB.

59. **Halla** el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas: $r: 2x - y + 5 = 0$ y $s: 2x - y + 1 = 0$

60. **Halla** el lugar geométrico del punto $Q = (x, y)$ que se mueve de tal manera que la pendiente de la recta que lo une con el punto $A = (0, 4)$ es 14 de la pendiente de la recta que lo une con $B = (2, 1)$.

61. **Halla** la ecuación de la recta de pendiente $m = \frac{1}{2}$, que forma con los ejes de coordenadas un triángulo de *16* unidades de área.

62. **Encuentra** un punto que equidiste de las rectas $a: 6x + y - 26 = 0$, $b: x + y = 1$, $c: -x + y = 5$



63. **Determina** la ecuación de la línea que pasa por $(-2, 3)$ y es perpendicular a la línea $2x - 3y + 6 = 0$

64. Una recta r pasa por el punto $A(-2, 3)$ y un vector director es $\vec{u}(-2, 5)$. **Determina** su ecuación en todas las formas que conozcas.

65. **Halla** un punto de la recta $-3x + 5y = 1$ que equidiste de los puntos $P = (-1, 3)$ y $Q = (5, 1)$.

66. Dado el cuadrilátero ABCD, donde:

$A = (1, 0)$, $B = (6, 2)$, $C = (0, 6)$ y $D = (-10, 2)$:

a. ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

b. **Calcula** su área.

c. **Halla** el simétrico del punto D respecto de la recta determinada por el segmento AB.

67. **Encuentra** la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, 2)$ y es paralela a la recta $2x - 3y + 4 = 0$

68. **Encuentra** la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, -4)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(6, -1)$.

69. **Halla** la ecuación de la mediana que pasa por el vértice A del triángulo cuyos vértices son $A(2, 3)$, $B(5, 7)$ y $C(-3, 4)$

70. **Encuentra** la ecuación general de la mediatriz que pasa por el lado AB, en el triángulo cuyos vértices son $A(4,1)$, $B(2,-3)$ y $C(-3,-5)$

71. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos $A = (-1, 2)$ y $B = (5, 3)$. **Halla** la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice $C = (x, y)$, que se mueve de tal manera que la pendiente del lado AC es siempre el triple de la pendiente del lado BC

72. La ecuación implícita de una recta es $4x + 5y - 3 = 0$. **Escribe** la ecuación de esta recta en forma continua, punto-pendiente, explícita, vectorial y paramétrica razonando las respuestas.

73. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos $A = (-1, 2)$ y $B = (5, 3)$. **Halla** la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice $C = (x, y)$, que se mueve de tal manera que la pendiente del lado AC es siempre el triple de la pendiente del lado BC.

74. **Halla** las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto A (1,-2) distan 2 unidades del punto B (3,1).

75. **Encuentra** las coordenadas del ortocentro, punto en el que se cortan las alturas del triángulo cuyos vértices son $A = (-4, 2)$, $B = (0, 6)$ y $C = (6, -4)$.

76. **Divide** el segmento determinado por $A = (9, 1)$ y $B = (15, 3)$ en tres partes iguales. Indica las coordenadas de los puntos de división.

77. **Escribe** las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A (3,-1) y es paralela a la recta:

$$s: \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \end{array}\right\}$$

78. **Halla** las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos P (1, -2) y Q (-1, 4).

79. **Halla** las ecuaciones de todas las rectas que pasen por el punto P (2,-3) y formen un ángulo de 45º con la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

80. **Halla** la ecuación de una recta que forma un ángulo de 120º con el semieje de abscisas positivo y que dista 2 unidades del origen.

81. **Calcula** la distancia entre el punto P (4, -1) y la recta que pasa por el punto A (2, 3) con pendiente de $\frac{-3}{4}$.

82. **Halla** las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forma la recta $5x + 12y - 60 = 0$ con el eje de ordenadas. **Calcula** los vértices, lados y área del triángulo DEF.

83. Dado el triángulo ABC donde $A = (-2, -4)$, $B = (2, -1)$ y $C = (-1, 5)$, **calcula**:

   a. La mediatriz del lado AB
   b. La altura desde el vértice C.
   c. La mediana desde el vértice B.
   d. El punto simétrico de C respecto del lado AB
   e. El área del triángulo.

84. **Determina** la posición relativa de las rectas $r: mx + y = m$ y $s: x + my = m$ según el valor del parámetro m.

85. **Calcula** la distancia del punto (5,2) a la recta $2x - 4y + 3 = 0$.

86. **Calcula** la distancia entre el punto $A(-2,1)$ y la recta que pasa por los puntos $B(5,4)$ y $C(2, 3)$

87. **Halla** la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A(1,-2)$ y $B(3,0)$. **Halla**, también, el ángulo que forma esta mediatriz con el eje de abscisas.

88. **Calcula** el valor de a para que $r: 2x + ay = 3$ y $s: 3x + 5y = 1$ sean rectas paralelas.

89. Dado el triángulo de vértices los puntos $A = (1, 1)$, $B = (-3, 5)$ y $C = (-1, -2)$, **calcula** la ecuación de:

   a. La recta que pasa por A y es paralela al lado BC.
   b. La mediana que parte de B.
   c. La altura que parte de C.

90. **Encuentra** la distancia entre las rectas paralelas

   a. $9x + 16y + 72 = 0$ y $9x + 16y - 75 = 0$
   b. $x + 2y + 2 = 0$ y $2x + 4y - 3 = 0$

91. Por el punto $A = (1, 6)$ trazamos la perpendicular a la recta $r: 2x + y - 2 = 0$. **Halla** un punto de esta perpendicular que equidiste de A y de la recta r.

92. Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

a. $r: 2x - y + 5 = 0,\ s: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1}$

b. $r: x + 2y + 2 = 0,\ s: \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-2}$

93. **Calcula** k para que la distancia entre las rectas $r: -3x + 2y = 0$ y $s: -3x + 2y + k = 0$ sea 3 unidades.

94. **Determina** el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a. $r: x - y - 3 = 0,\ s: x - 3y - 5 = 0$

b. $r: y + 3 = \frac{1}{2}\ (x...1),\ s: y = x + 2$

95. **Calcula** el área del triángulo que determinan la recta $x - 2y + 8 = 0$ y los ejes coordenados.

96. **Determina** la mediatriz del segmento que tiene por extremos $A\ (1, 2)$ y $B\ (3, -1)$.

97. Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas $r: x + y - 1 = 0$ y $s: x - 2y - 5 = 0$. Uno de sus vértices es el punto $A\ (1, -1)$. **Halla** los otros vértices.

98. Los puntos $A\ (-2, -2)$ y $B\ (1, 4)$ son vértices de un triángulo rectángulo en A. **Determina** el tercer vértice que está situado sobre la recta $x + y - 1 = 0$.

99. En el triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(-1, 4)$ y $C(0, 5)$ **calcula**:

a. la altura correspondiente al vértice C,

b. la ecuación de la mediatriz del lado AB,

c. su área

100. Averigua el valor del parámetro m para que las rectas $r: -x + my - 3 = 0$ y $s: mx - 4y + 2 = 0$ sean paralelas.

101. **Determina** la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$

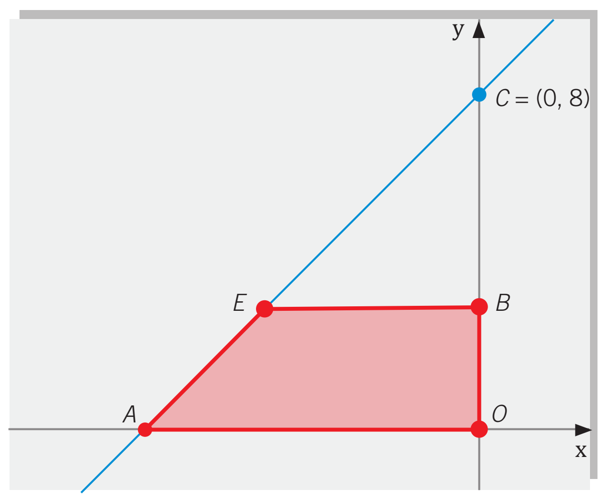
102. **Halla** la ecuación de la altura que pasa por el vértice C del triángulo cuyos vértices son $A(2, 3)$, $B\ (5, 7)$ y $C\ (-3, 4)$

103. Dados los puntos $P = (2, 0)$ y $Q = (-1, 3)$ y la recta $r: 2x - y + 3 = 0$, **calcula**:

a. $d\ (P, Q)$ b. $d\ (P, r)$ c. $d\ (Q, r)$

104. **Determina** m para que $r: -mx + y - 10 = 0$ y $s: x + 2y - 3 = 0$ formen un ángulo de 60°.

105. **Halla** el lugar geométrico que describirá el punto E en la siguiente figura, si el área del trapecio $AOBE$ es de $14\ u^2$:



106. La recta r tiene como abscisa en el origen -3 y como ordenada en el origen 2. **Calcula** la distancia del punto $C\ (5, 1)$ a dicha recta. Luego, **encuentra** la ecuación de la recta s que siendo paralela a r tiene por ordenada en el origen 6.

107. **Determina** los valores de r para que las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones $(1 - r)x - 10y + 3 = 0$ y $(m + 2)x + 4y - 11m - 18 = 0$ sean:

a. perpendiculares

b. paralelas

c. coincidentes

108. **Calcula** los puntos de la recta $7x - y - 28 = 0$ que distan cinco unidades de longitud de la recta $3x - 4y - 12 = 0$.

Ejercicios y problemas propuestos

109. Un cuadrado tiene un vértice en el punto $(0,7)$ y una de sus diagonales sobre la recta de ecuación $3x - 2y - 6 = 0$. **Encuentra** el área.

110. Una recta pasa por el punto A $(-1, 2)$ y tiene por vector director $v = 2i + 3j$.

   a. **Calcula** gráficamente las coordenadas de otros dos puntos de la recta.

   b. **Calcula** la pendiente de la recta.

   c. **Determina** la ecuación de la recta.

111. **Calcula** la ecuación de la recta que pasa por el punto A $(-3, 3)$ y tiene por vector director $v = i - 2j$

112. **Halla** el área y los ángulos del cuadrilátero de vértices A $(0,3)$, B $(3,8)$, C $(8,6)$, D $(8,2)$.

113. **Determina** el valor de p, de forma tal que $x - y - 1 = 0$ y $(p-1)x + py + 10 = 0$ sean perpendiculares.

114. Dados los puntos A $(3,5)$, B $(7, -1)$, C $(-4, 4)$ y D $(0, -2)$. ¿Es $\overline{AB} // \overline{CD}$?

115. **Calcula** los vértices C y D y el área del trapecio rectángulo ABCD cuyo lado oblicuo es CD. Se sabe que $A = (1, 2)$, $B = (-1, 7)$ y la ecuación de la recta CD es $x + y - 1 = 0$. Los puntos A $(3, -2)$ y C $(7, 4)$ son vértices opuestos de un rectángulo ABCD, el cual tiene un lado paralelo a la recta $6x - y + 2 = 0$.

116. **Halla** las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo y las ecuaciones de sus lados.

117. **Halla** las coordenadas del simétrico del punto P $(0,6)$ respecto de la recta $y = 2x - 3$.

118. Los puntos A $(2, -1)$ y C $(3, 6)$ son vértices opuestos de un rectángulo ABCD. Sabiendo que B está en la recta de ecuación $x + 4y = 0$, **halla** las coordenadas de los vértices B y D.

   (Recomendación: basta hallar los puntos P sobre la recta tales que PA y PC son perpendiculares).

119. Dado el triángulo de vértices $A = (-2, 3)$, $B = (2, 5)$ y $C = (2, -1)$, **demuestra** que los pies de la perpendicular desde el punto $Q = (4, 3)$ a los lados del triángulo están alineados.

5 Más a fondo

120. **Determina** el área del paralelogramo ABCD, sabiendo que la ecuación del lado AB es $x - 2y = 0$, la ecuación del lado AD es $3x + y = 0$ y las coordenadas del punto C son $(3, 5)$. **Razona** la respuesta.

121. La recta $4x - 3y = 12$ es la mediatriz del segmento AB. **Halla** las coordenadas del punto B, sabiendo que las del punto A son $(1,0)$.

122. **Relaciona** la recta determinada en cada uno de los siguientes casos con su ecuación:

   a. Pasa por el punto A $(5, 3)$ y tiene pendiente -2.

   b. Pasa por los puntos A $(5, -2)$ y B $(3, 2)$.

   c. Forma un ángulo de 45° con el sentido positivo del eje de abscisas.

   d. Pasa por el punto A $(5, -11)$ y tiene por vector director $v = (-2, 4)$.

   - $y = -2x - 1$
   - $y = -2x + 13$
   - $y = -2x + 8$
   - $y = x + 4$

123. Los puntos B $(-1, 3)$ y C $(3, -3)$ son los vértices de un triángulo isósceles que tiene el tercer vértice A en la recta $x + 2y = 15$, siendo AB y AC los lados iguales. **Calcula** las coordenadas de A y las ecuaciones y las longitudes de las tres alturas del triángulo.

124. Dados los puntos A $(4,-2)$ y B $10,0)$, **halla** el punto de la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes que equidista de ambos puntos

125. Dados los puntos A $(2,1)$, B $(-3,5)$ y C $(4, m)$, **calcula** el valor de m para que el triángulo ABC tenga de área 6.

126. Dados los puntos A $(0, -1)$ y B $(1, 2)$, **halla** las coordenadas de todos los puntos P situados sobre la recta $x + y = 2$ tales que las rectas PA y PB sean perpendiculares.

Ejercicios y problemas propuestos

127. **Calcula** las coordenadas de un punto P situado sobre la recta $x + y - 15 = 0$ que equidiste de las rectas $y - 2 = 0$, $3y = 4x - 6$.

128. **Averigua** cuáles de las siguientes parejas de rectas pueden contener dos medianas de un triángulo equilátero:

   a. $(2+\sqrt{3})x + y - 1 = 0$ $\quad x - y - 3 = 0$

   b. $x + 2y - 1 = 0$ $\quad 2x - y + 4 = 0$

129. **Determina** las longitudes de los lados y los ángulos del triángulo cuyos lados se encuentran sobre las rectas $2x + y = 2$, $5x + 2y = 10$ y el eje de ordenadas.

130. Un hexágono regular tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de sus lados sobre la recta de ecuación $\sqrt{2}x + y - 3 = 0$. **Calcula** su área.

131. Un hexágono regular tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de sus vértices es $(6, 0)$. **Halla** las coordenadas de los demás vértices y las ecuaciones de sus lados.

132. Las rectas $mx + y = 0$ y $\sqrt{3}x - y = 1$ son medianas de un triángulo equilátero de lado 2. **Encuentra** las coordenadas de sus vértices.

133. Un rayo de luz r pasa por el punto de coordenadas $(1, 2)$ e incide sobre el eje de abscisas formando con este un ángulo de 135°. Suponiendo que sobre el eje de abscisas se encuentra un espejo, **halla** la ecuación del rayo r y del rayo reflejado en el espejo.

134. Por el punto $A(-2, 3)$ se trazan dos rectas perpendiculares a las bisectrices del primer cuadrante y del segundo cuadrante. **Halla** las ecuaciones de dichas rectas y las coordenadas de los vértices del triángulo formado por esas dos rectas y la recta de ecuación $x - 4y = 5$.

135. **Calcula** la distancia entre las rectas r y s, siendo $r: x + 3y + 1 = 0$ y $s: x + 3y - 2 = 0$.

136. Sea el triángulo de vértices $A(4, 2)$, $B(13, 5)$ y $C(6, 6)$.

   a. **Halla** la ecuación de la altura que pasa por el vértice C.

   b. **Calcula** la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado AB.

137. **Calcula** k para que la distancia entre las rectas $r: -3x + 2y = 0$ y $s: -3x + 2y + k = 0$ sea 3 unidades.

138. **Indica** la posición relativa de las rectas r y s en cada uno de los casos siguientes:

   a. $r: 2x - 3y + 4 = 0$; $s: -x + 3y + 2 = 0$

   b. $r: -x - y + 2 = 0$; $s: 2x + 2y - 1 = 0$

   c. $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1}$; $s: y = 2x - 4$

139. **Calcula** las coordenadas del punto intersección de r y s en los siguientes casos:

   a. $r: 2x - 4y = 5$; $s: 3x - 6y = -2$

   b. $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3k \\ y = -1 + 4k \end{array}\right\}$; $s: 3x + 2y = 1$

140. **Determina** el coseno del ángulo que forman las rectas r y s cuyas ecuaciones son las siguientes:

   $r: x - 4 = \dfrac{y+3}{2}$ y $s: x - 1 \dfrac{y+4}{3}$

141. **Halla** la ecuación de las siguientes rectas:

   a. Pasa por el punto $A(1, 3)$ y es paralela a la recta de ecuación $3x - y + 5 = 0$.

   b. Pasa por el punto $B(7, -3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $3x + 6y - 2 = 0$.

142. **Halla** las coordenadas del punto de corte de las siguientes rectas y representa gráficamente:

   a. $-2x + y = 1$

   b. $x + y = 4$

Y TAMBIÉN: ¿?

Debido a la precaria salud que padecía desde niño, René Descartes tenía que pasar innumerables horas en cama. Aprovechaba para pensar en filosofía, matemáticas, divagar e incluso se permitía perder el tiempo pensando en las musarañas.

Teniendo su vista perdida en el techo de la estancia fue una mosca a cruzarse en su mirada, cosa que hizo que la siguiera con la vista durante un buen rato, mientras pensaba y se preguntaba si se podría determinar a cada instante la posición que tendría el insecto, por lo que pensó que si se conociese la distancia a dos superficies perpendiculares, en este caso la pared y el techo, se podría saber.

Mientras le daba vueltas a esto se levantó de la cama y agarrando un trozo de papel dibujó sobre él dos rectas perpendiculares: cualquier punto de la hoja quedaba determinado por su distancia a los dos ejes. A estas distancias las llamó coordenadas del punto: acababan de nacer las Coordenadas Cartesianas, y con ellas, la Geometría Analítica.

Extrído de: http://goo.gl/u5VqML

143. Los puntos P, Q y R son vértices de un triángulo. **Determina** en cada caso si es equilátero, isósceles o escaleno.

a. P (-1, 5), Q (0, -4), R (8, 4)
b. P (4, 0), Q (-3, 4), R (-3, -4)
c. P (-2,-1), Q (3,2), R (5,-5)
d. P (-5, 3), Q (6, 6), R (-3, -1)
e. P (-1, 3), Q (6, -2), R (3, 6)

144. **Calcula** el perímetro de un cuadrilátero cuyos vértices son:

a. A (4, l), B (1,4), C (-2, l), D (1, -2)
b. A (8,-1) B (7, 4), C (-3, 2), D (2, -3)
c. A (4, 2), B (-2, 6), C (-8, 2), D (-2, -2)
d. A (4, 2), B (-1, 2), C (4, -2), D (7, -2)
e. A (5, -2), B (4, 3) C (-2, 5), D (5, -2)

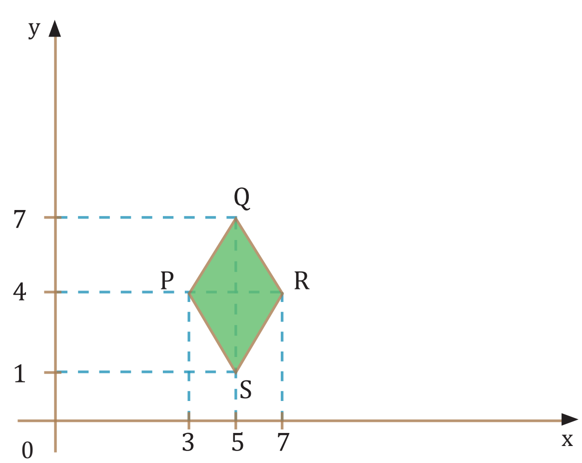
145. En los tres triángulos siguientes averigua si son acutángulos, rectángulos u obtusángulos por dos procedimientos distintos: mediante las longitudes de los lados y mediante los productos escalares de los vectores que forman los lados:

A (2, 0), B (1, 5), C (3, 3)

A (2, 0), B $(6, 2\sqrt{3})$, C $(2+\sqrt{3}, -2)$

A (3, -1), B (3, 3), C (0, 6)

146. En el siguiente gráfico del rombo, **indica** la longitud de sus lados, sus ángulos internos y su área.



Ejercicios y problemas propuestos

147. Dados los puntos A = (2, 1), B = (0, -3) y C = (3, -2): 2

   a. **Calcula** el simétrico de A respecto de B.

   b. **Calcula** el simétrico de C respecto de la recta determinada por A y B.

   c. ¿Qué tipo de cuadrilátero forman los puntos A, B y C con este último punto? **Calcula** su área.

148. Se considera la familia de rectas:

   $m x + (m - 1) y + (m + 2) = 0$ siendo m un número real.

   a. **Determina** el punto común de todas las rectas de la familia.

   b. **Halla** la recta que pase por el punto P = (1, 2).

   c. **Encuentra** la recta de esta familia que es paralela a r: $x - 3y + 1 = 0$.

149. Un rayo luminoso parte del punto $A = (3, 4)$ y se refleja sobre la recta $-x + y = -3$ en el punto $C = (11, 8)$. **Halla** la ecuación del rayo reflejado.

150. Dadas las rectas r : $5x + 4y = 30$, s : $-4x + 5y = 17$.

   a. **Demuestra** que r y s son perpendiculares y calcula el punto de intersección M.

   b. Si r y s son las diagonales de un rombo, calcula sus vértices sabiendo que la diagonal mayor vale $2\sqrt{164}$ unidades y la menor, $2\sqrt{41}$

   c. **Halla** las ecuaciones de sus lados:

151. **Calcula** la distancia entre los puntos P (-5,6); Q (3,-7) y R (-8,-12), e **indica** la figura plana que representa.

152. **Halla** las ecuaciones de los lados de un triángulo isósceles ABC, sabiendo que su lado desigual tiene como extremos los puntos A = (2, -2) y B = (7, 3), y que su tercer vértice C es un punto de la bisectriz del primer cuadrante.

153. **Halla** las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto P = (-1, 2) y forman un ángulo de 30° con la recta $x + y = 0$.

154. La recta de Euler de un triángulo es la que une el ortocentro, el circuncentro y el baricentro del triángulo. **Encuentra** estos puntos en el triángulo de vértices A = (7, 1), B = (-1, -1) y C = (-2, 3). **Comprueba** que están alineados y **escribe** la ecuación de la recta de Euler.

155. Dos lados $r: -5x + 14y - 179 = 0$, $s: 7x - 4y + 79 = 0$, y una diagonal t : $x + 5y = 50$ parten de un mismo vértice de un paralelogramo. El punto de intersección de las diagonales está en el eje OY. **Encuentra** los vértices y las ecuaciones de los otros dos lados.

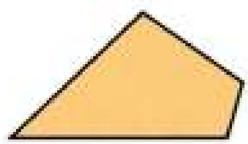
156. **Halla** la ecuación del conjunto de puntos que equidistan ocho unidades del punto P (4,3). **Grafica** la figura

157. **Determina** la abscisa y la ordenada al origen, de la recta que pasa por los puntos (-3, -1) y (5, 3). **Obtén** la forma general y la simétrica de la recta.

158. Los vértices de un cuadrilátero son: A (-2, 1), B (2, 5), C (9, 6) y D (7, 2). **Determina** el perímetro y el área.

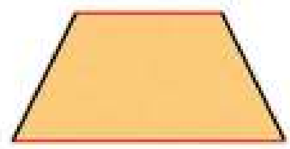
Trapezoides

Sin lados paralelos



Trapecios

2 lados paralelos

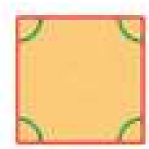


Paralelogramos

lados paralelos dos a dos

Cuadrados

- 4 lados iguales
- 4 águlos rectos

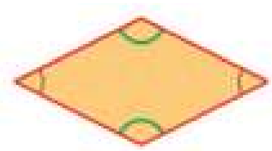


Rectángulos

- Lados iguales dos a dos
- 4 ángulos rectos

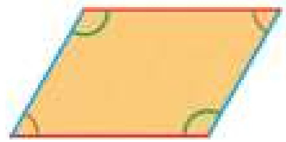
Rombos

- 4 lados iguales
- Ángulos iguales dos a dos

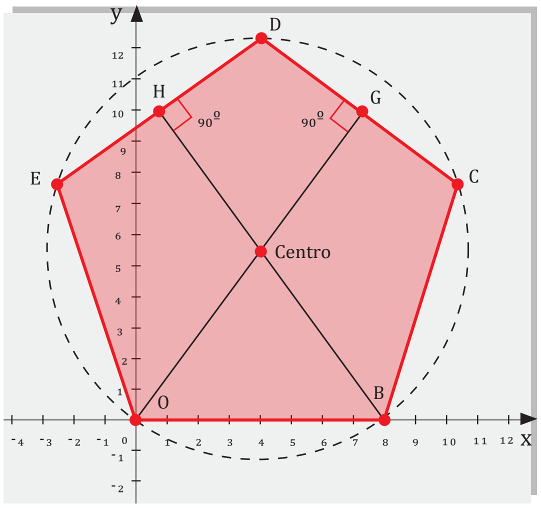


Romboides

- Lados y ángulos iguales dos a dos.



159. **Halla** todos los puntos que se muestran en el siguiente pentágono y **calcula** su área aproximando los valores a las décimas:



O = (0, 0), B = (8, 0), C = (10,5; 7,6), D = (4; 12,3), E (-2,5; 7,6), F = (4; 5,5) H = (0,8; 10), G = (7,2; 10). Área 110,1 u^2

160. Los vértices de un triángulo son; A (-1, 3), B (3, 5) y C (7, -1). Si D es el punto medio del lado AB y E del lado BC, demuestra que la longitud del segmento (DE) es la mitad de la longitud del lado (AC).

AC=4,472u

161. Se sabe que P (1,1) y Q (3,5), son los vértices de un paralelogramo y que R tiene como abscisa 11, ¿Cuáles serán las coordenadas del punto S?, ¿y la ordenada de R?

S (9, 1) y R (11, 5).

162. Si A (-2,-1) y C (5,-2), son los vértices de un triángulo isósceles, ¿cuáles serán las coordenadas del vértice B?

Demuestra que los puntos A (-5,0); B (0,2) y C (0,-2), son los vértices de un triángulo isósceles y calcula el perímetro y el área. AB = 5.385 u; AC = 5.385 u; CB = 4; p=14.770 u y A=10 u^2.

163. **Demuestra** que los puntos A (0,0); B (3,4); C (8,4) y D (5,0), son los vértices de un rombo y, **calcula** el perímetro y el área.

AB = BC = DC = AD = 5 u; p=20 u y A=20 u^2.

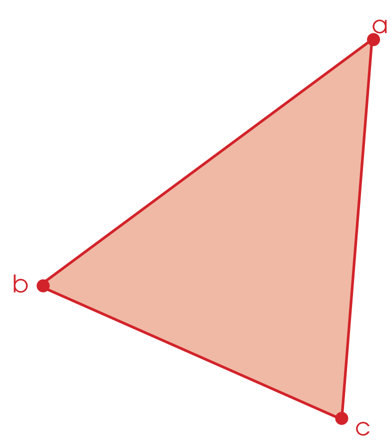
164. **Demuestra** que los cuatro puntos (2,2); (5,6); (9,9) y (6,5) son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

165. **Halla** el perímetro y el área del cuadrilátero cuyos vértices son; P (-3,-1); R (0,3); S (3,4) y T (4,-1).

p =20.261 u y A=22 u^2.

166. Los vértices de un triángulo son los puntos A (2, -2); B (-1, 4) y; C (4, 5). **Calcula** los ángulos de inclinación de los lados del Δ ABC, el perímetro y el área.

74º 03´17´ ; 116 º 33'54´´ ; 11º 18´36´´ ; p=19,087 u ; A= 16,5u^2



Elementos en el plano

Ecuaciones de una recta

Punto: $A = (a_1, a_2)$
Vector director: $\vec{u} = (u_1, u_2)$
Pendiente: $m = u_2 / u_1$

Vectorial: $\vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}, k \in \mathbb{R}$

Paramétrica: $r: \left.\begin{array}{l} x = a_1 + k u_1 \\ y = a_2 + k u_2 \end{array}\right\}$, donde $k \in \mathbb{R}$

Continua: $\dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2}$

General: $Ax + By + C = 0$
$A = u_2;\ B = -u_1;\ C = -u_2 a_1 + u_1 a_2$
(A, B) vector normal

Explícita: $y = mx + n$
$n = \dfrac{u_2}{u_1} a_1 + a_2$

Punto pendiente: $y - a_2 = m(x - a_1)$

Canónica: $P = (a, 0), Q = (0, b) \in r: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Posición relativa de dos rectas

$r: Ax + By + C = 0$
$s: A'x + B'y + C' = 0$

$\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$ coincidentes

$\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$ paralelas

$\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$ secantes

$\cos\alpha = \left| \dfrac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} \right|$

Distancias

$P = (p_x, p_y),\ Q = (q_x, q_y) \rightarrow d(P, Q) = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2}$

$r: Ax + By + C = 0;\ P = (p_x, p_y) \rightarrow d(r, P) = \dfrac{|Ap_x + Bp_y + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$r \parallel s$; $d(r, s) = d(A, s) = d(r, B)$, donde $A \in r, B \in s$

Lugares geométricos

Mediatriz de $\overline{AB}$; $\{P \text{ tal que } d(P, A) = d(P, B)\}$
Bisectriz de r y s ; $\{P \text{ tal que } d(P, r) = d(P, s)\}$

Para finalizar

1. **Halla** la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (2, -3)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (2, -5)$ en todas sus formas posibles.

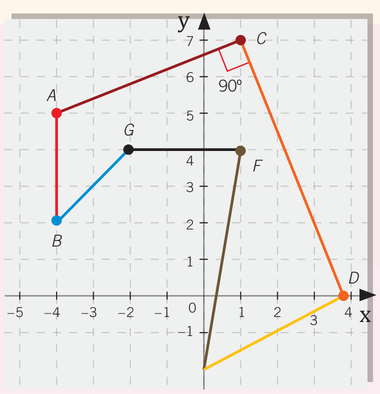
2. Dado el cuadrilátero ABCD, donde $A = (1, 0)$, $B = (6, 2)$, $C = (0, 6)$ y $D = (-10,2)$:

   a. ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

   b. **Calcula** su área.

   c. **Halla** el simétrico del punto D respecto de la recta determinada por el segmento AB.

3. **Calcula** las ecuaciones determinadas por los segmentos de la siguiente figura. (Cada ecuación debe ser dada de una forma distinta).



4. Dado el triángulo de vértices $A = (-2, 3)$, $B = (2, 5)$ y $C = (2, -1)$, **demuestra** que los pies de la perpendicular desde el punto $Q = (4, 3)$ a los lados del triángulo están alineados.

5. Se considera la recta $r: ax + by + 2 = 0$. **Determina** a y b para que dicha recta sea paralela a la recta $s: 2x - 3y = 9$ y diste 3 unidades del origen de coordenadas.

6. Dado el triángulo de vértices $A = (-4, 2)$, $B = (-1, 6)$ y $C = (3, -2)$, **calcula**:

   a. La ecuación canónica de la recta determinada por el segmento BC.

   b. La altura que parte del vértice A.

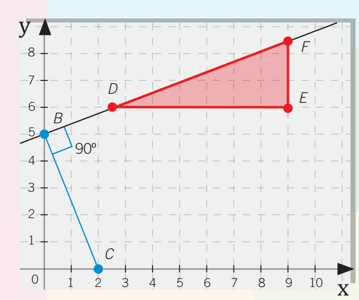
   c. La mediana que parte del vértice B, en forma paramétrica.

   d. El área del triángulo.

   e. El ángulo ACB.

7. Desde el punto $A = (1, 5)$ parte un rayo luminoso que se refleja en la recta $r: -3x + 7y = -5$ y, después de la reflexión, llega al punto $B = (8, 8)$. ¿En qué punto de la recta r deberá reflejarse el rayo?

8. **Calcula** la longitud de los lados y el área del triángulo DEF, dada la ecuación de la recta: $y = \frac{2}{5}x + 5$, que pasa por los puntos B ,D, y F.



EVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal
  - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
  - ¿He cumplido mis tareas?
  - ¿Qué aprendí en esta unidad temática?
- Trabajo en equipo
  - ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
  - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- **Escribe** la opinión de tu familia.
- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

Euclides, el padre de la geometría

Euclides (325 a. C. -265 a. C.) fue un matemático y geómetra griego, autor de la obra *Los elementos* en la que describe de manera formal el estudio de elementos del plano, resumidos en cinco postulados. En ella aparece la primera definición de la línea recta: «Es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella».

SI YO FUERA....

Arquitecto

Diseñaría proyectos arquitectónicos novedosos, que embellezcan mi ciudad, a través de la forma, el color, la luz, etc.
Trabajaría con vectores en las superficies regladas.
También podría ayudar a mi familia, asesorándoles a la hora de construir o remodelar sus viviendas o negocios, así como obtener permisos y licencias para hacer sus obras.
Pero para ser un buen arquitecto me propongo estudiar mucho, sobre todo comprender y conocer muy bien todo lo relacionado con las matemáticas y especialmente con esta unidad.

OPINION

¿Imposible?

«Dos rectas paralelas se cortan en el infinito»

Esta polémica afirmación corresponde al matemático e ingeniero francés Jean-Victor Poncelet (1788 - 1867). En la geometría de Poncelet, al igual que en la geometría proyectiva, dos rectas en un plano pueden cortarse o cruzarse, pero, no pueden ser paralelas, ya que considera que hasta estas se cortan en un punto del infinito denominado punto impropio.

- **Accede** al enlace http://links.edebe.com/yzz y obtendrás más información sobre la geometría proyectiva. ¿De qué principios parte?
- **Busca** las diferencias sustanciales entre los principios de la geometría euclidiana y la proyectiva.

NOTICIA

Medidores láser de distancias

Un medidor láser, también conocido como telémetro láser, para medir distancias, utiliza el tiempo que tarda un pulso de luz láser en reflejarse en un punto y volver al origen. El tiempo transcurrido recibe el nombre de tiempo de vuelo. Una de las aplicaciones de los medidores láser es calcular la distancia entre la Tierra y la Luna.

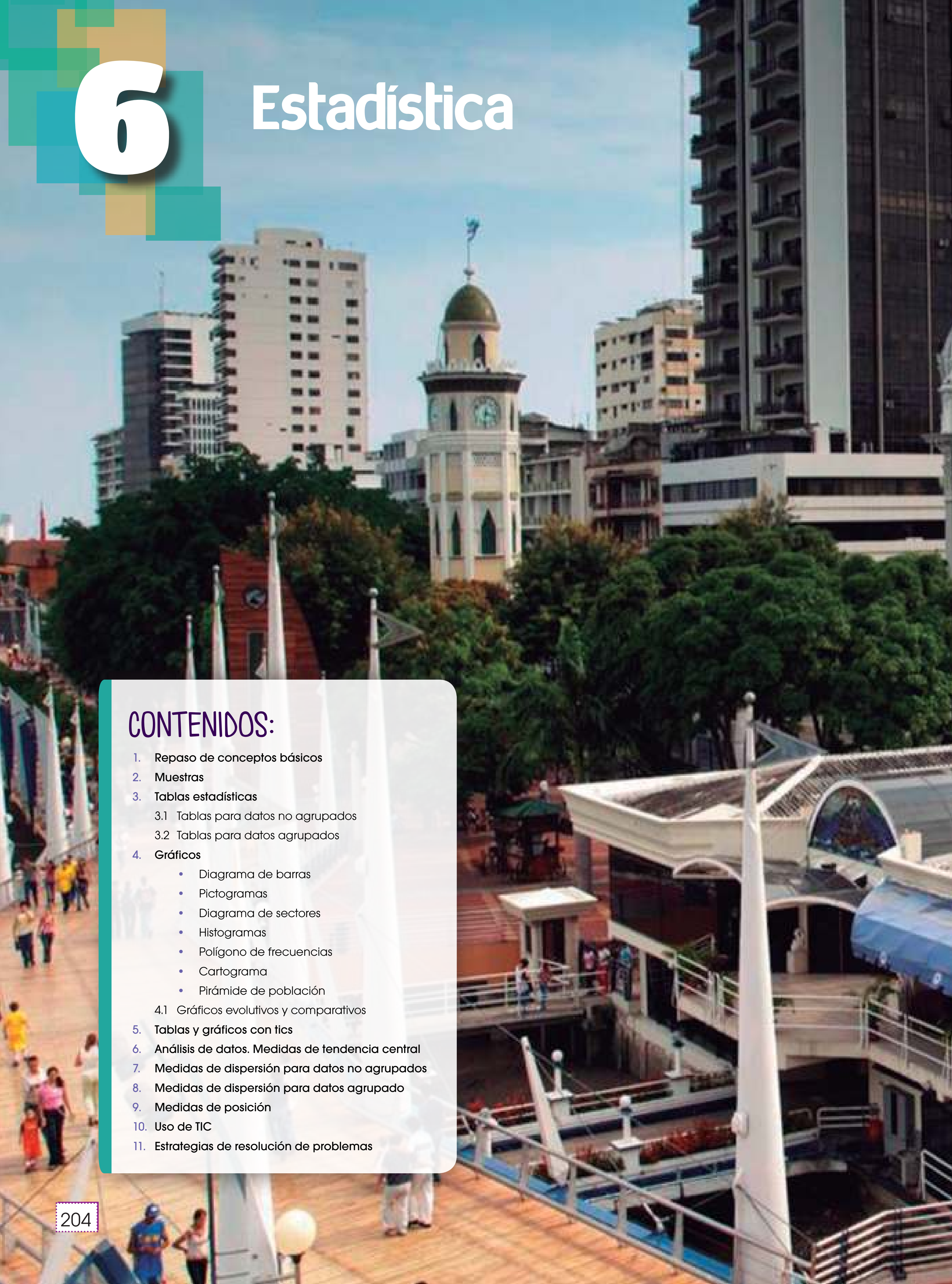
- **Accede** al enlace http://links.edebe.com/gmnqh9 y **contesta**:
  - **Busca** las diferencias sustanciales entre los principios de la geometría euclidiana y la proyectiva.
  - ¿Qué fórmula emplean los medidores láser para calcular la distancia entre dos puntos?
  - ¿Cuál sería el tiempo de vuelo si la distancia medida es de 300 m?
  - ¿Por qué crees que cuando medimos la distancia entre dos puntos muy próxmos o muy lejanos los medidores pierden precisión?
  - ¿Por qué se utiliza luz tipo láser y no de otra tipología?

SENTIDO CRÍTICO

El 5.° postulado de Euclides a debate

De los cinco postulados de **Euclides,** el quinto de ellos ha sido motivo de controversia, ya que es menos evidente y más complejo de demostrar que los anteriores.

- **Formen** grupos de 3-4 personas y **describan** el contenido de los cuatro primeros postulados accediendo a http://links.edebe.com/5ujz.
- **Busquen** diversas reformulaciones del quinto postulado, y qué matemáticos posteriores fueron los más críticos al respecto. Pueden encontrar más información en http://links.edebe.com/3ez3.
- A partir de la reformulación de dicho postulado, **indiquen** los principios de la geometría que se plantean.



6 Estadística

CONTENIDOS:

http://goo.gl/91QQ2P

Noticia:

Inflación negativa en julio, según datos del INEC

Agosto 7, 2015 Últimas noticias económicas.

La inflación mensual en julio de 2015 fue negativa (-0,08%) por primera vez en el año, según el último reporte del Índice de Precios publicado por el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC). El Instituto señala que tres divisiones de gasto explican principalmente la variación negativa: la de alimentos y bebidas no alcohólicas, transporte y la de recreación y cultura, cuyas incidencias inflacionarias son de -0,0413%, -0,0466% y -0,0311% respectivamente. En julio de 2014, la inflación fue de 0,40%, mientras que en julio de 2009 también se registró una cifra similar de -0,07%, según las cifras del INEC. El INEC informa, además, que para el séptimo mes del año el país registra una inflación acumulada de 2,99% en comparación con el 2,31% que alcanzó en julio de 2014. Mientras, la inflación anual se ubicó en 4,36%.

(http://tinyurl.com/na2p9sg).

Película:

Ciudad mágica, de William A. Wellman (1947). Una empresa que se dedica a elaborar sondeos y busca una ciudad en la que la opinión de cuyos habitantes sea representativa de la de todo el país.

EN CONTEXTO:

La tabla muestra los datos de reciclaje del vidrio de cuatro comunidades autónomas en 2009

Comunidad	Habitantes	Kilos de vidrio recogido
A	8 302 923	78 888 840
B	1 345 473	22 637 624
C	1 095 426	28 822 970
D	2 103 992	25 829 030

¿Qué comunidad recicla más vidrio?

1. **Calcula** la cantidad de vidrio reciclado por habitante en cada comunidad.
2. **Elabora** un gráfico comparativo de la cantidad total de vidrio reciclado y la cantidad de vidrio reciclado por habitante en cada comunidad.

La cantidad total de vidrio reciclado, ¿es un indicador del porcentaje de reciclaje de una comunidad?

1. REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS

La estadística es la parte de las matemáticas que se ocupa de recoger, organizar y analizar grandes cantidades de datos para estudiar las características o el comportamiento de un colectivo.

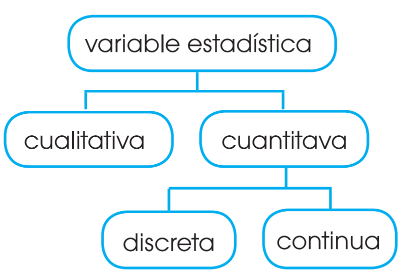
En todo estudio estadístico aparecen los siguientes conceptos básicos:

- Población: conjunto de los elementos que son objeto del estudio.
- Individuo: cada uno de los elementos de la población.
- Variable estadística: propiedad o característica de la población que estamos interesados en estudiar. Si esta característica toma valores numéricos, diremos que la variable es cuantitativa; en caso contrario, diremos que es cualitativa**.**

Las variables estadísticas suelen representarse por una letra mayúscula: X, Y, Z.

A continuación, puedes ver cuál es la población, los individuos y la variable estadística de diferentes estudios estadísticos realizados en una ciudad.

Estudio estadísco	Población	Individuo	Variable estadística
Medio de transporte que utilizan más frecuentemente sus habitantes.	Habitantes de la ciudad.	Cada uno de los habitantes.	Medio de transporte utilizado.
Número de cafés servidos en los bares a lo largo de un día .	Bares de la ciudad.	Cada uno de los bares.	Número de cafés servidos.
Tiempo medio diario que dedican sus habitantes a leer la prensa.	Habitantes de la ciudad.	Cada uno de los habitantes.	Tiempo medio dedicado a la lectura de la prensa.



Fíjate en que en los dos últimos estudios estadísticos, la variable es cuantitativa; sin embargo, los valores que toma la primera de ellas solo son números enteros (0, 1, 2, 3...), mientras que la segunda puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo.

Diremos que la primera es cuantitativa discreta y la segunda, cuantitativa continúa.

Actividades

1. **Indica** cuál es la población y la variable estadística de cada uno de los siguientes estudios estadísticos. **Señala**, además, de qué tipo es la variable estadística.
   a. Preferencias deportivas de los alumnos de tu clase.
   b. Tiempo medio invertido por los trabajadores españoles en desplazarse desde su domicilio hasta el centro de trabajo.
   c. Número de veces, en un año, que asisten al teatro los habitantes de tu localidad.

2. MUESTRAS

Al efectuar un estudio estadístico, no siempre es posible observar la característica objeto del estudio en todos los individuos de la población.

Imagina que un diario quisiera elaborar un estudio sobre las preferencias literarias y musicales de los jóvenes ecuatorianos. Está claro que no puede preguntarse a todos los individuos, pues la población es demasiado grande.

En estos casos se toma solo una parte de la población, a la que llamamos muestra.

Para que el estudio estadístico sea fiable, la muestra ha de ser representativa del total de la población. Existen diferentes métodos para escoger una muestra, entre los que destacaremos dos:

- **Muestreo aleatorio simple**: cada elemento tiene la misma probabilidad de ser elegido.
- **Muestreo estratificado**: las proporciones de diferentes individuos deben ser las mismas en la muestra que en la población.

En ambos casos, resulta de fundamental importancia la elección del tamaño de la muestra. En términos generales, cuanto mayor sea este, mayor será, también, su fiabilidad.

Ejemplo 1

Se desea estudiar las preferencias literarias de los 950 alumnos de un centro escolar, de los que 570 son chicas. Explicar cómo obtener una muestra de 100 individuos:

a. Por muestreo aleatorio simple.

b. Por muestreo estratificado.

a. Una manera de obtener una muestra de 100 individuos por muestreo aleatorio simple es introducir en una urna 950 papeletas con el nombre de cada alumno en cada papeleta escoger al azar 100.

b. Si de los 950 individuos, 570 son chicas, la proporción de estas en el total de la población es del 60%. Así, para escoger una muestra de 100 individuos por muestreo estratificado, deberemos elegir 60 chicas y 40 chicos.

Y TAMBIÉN: ¿?

Estadística descriptiva y estadística inferencial

La rama de la estadística que solo pretende recoger, organizar y analizar los datos de un estudio estadístico se denomina estadística descriptiva.

Existe otra rama de la estadística que trabaja con muestras y pretende, a partir de estas, deducir (inferir) características de toda la población. Es la llamada estadística inferencial.

https://goo.gl/WSZTSN

VEIT LUDWIG VON SECKENDORFF

Estadista e historiador alemán (1626-1692).

A mediados del siglo XVII surgen los primeros intentos de consolidar la estadística como una disciplina cuyo objeto era la descripción de los sucesos notables del Estado, gracias a V. L. von Seckendorff y a Conring, considerado el fundador.

G. Achenwall, discípulo de Conring, consolidó los postulados de esta nueva ciencia, a la que denominó Statistik. Dicho término apareció por primera vez en 1749 en su obra Staatsverfassung der heutigen vornehmsten europäischen Reiche und Völker im Grundisse

Actividades

2. **Investiga** acerca del nivel de estudios de los habitantes de nuestra población. Una muestra de 50 personas elegidas al azar. Argumenta cuál de los siguientes métodos te parece más adecuado:

a. **Pregunta** a los alumnos a la salida de un centro escolar.

b. **Pregunta** a la gente que pasea un sábado por la tarde por la calle más céntrica.

c. **Llamando** a una lista telefónica de al menos 50 contactos.

3. Representatividad, coste y tiempo son factores que hay que considerar conjuntamente a la hora de decidir el tamaño de una muestra. ¿Por qué están interrelacionados?

3. TABLAS ESTADÍSTICAS

Una vez recogidos los datos de un estudio estadístico debemos ordenarlos, para proceder, posteriormente, a su análisis. Con este fin, suelen utilizarse las tablas de frecuencias.

El proceso de elaboración de estas tablas depende de si agrupamos o no los datos en intervalos.

3.1. Tablas para datos no agrupados

Si la variable tiene pocos datos de diferente valor, procedemos del siguiente modo:

Valor	Recuento	Frecuencia absoluta (n_i)
2		4
3		5
4		3
5		4
6		2

Tabla 1. Cantidad de hermanos de un grupo de 18 estudiantes de un colegio

—Construimos una tabla con tres columnas.

—En la primera columna, anotamos los diferentes valores que toma la variable, ordenados si estos son numéricos.

—En la segunda, trazamos un pequeño segmento cada vez que aparece un dato correspondiente a un determinado valor.

—En la tercera columna, anotamos, para cada valor, el número total de segmentos trazados. Este número es la frecuencia absoluta (ni) de dicho valor.

En el margen puedes ver la tabla de frecuencias (tabla 1) correspondiente cantidad de hermanos de un grupo de 18 estudiantes de un colegio: 3, 4, 6, 2, 3, 3, 2, 6, 5, 5, 2, 3, 4, 5, 5, 2, 3 y 4.

3.2. Tablas para datos agrupados

Si la variable tiene muchos datos de distinto valor, antes de efectuar el recuento debemos agrupar los datos en intervalos.

69	58	54	40	71	61	57	52	64	56
52	61	54	50	63	55	51	30	70	60
54	58	54	47	63	69	58	54	49	70

Considera el conjunto de datos de este recuadro, correspondientes a las puntuaciones (en una escala de 0 a 100) obtenidas en un test psicotécnico por 30 aspirantes a un puesto de trabajo.

Veamos cómo proceder para efectuar la agrupación de estos datos en intervalos.

Procedimiento	Ejemplo
Busquemos el valor máximo y el valor mínimo que toma la variable y calculamos su diferencia. Este valor es el recorrido de la variable.	71 − 30 = 41
Decidamos el número de intervalos de clase en que agrupemos los datos (se suele tomar entre 5 y 10).	Tomemos 6 intervalos.
Determinemos la amplitud de cada intervalo. Para ello, dividamos el recorrido entre el número de intervalos elegido y aproximemos el resultado por exceso.	41 : 6 = 6,83 Q 7
Formemos los intervalos de modo que el extremo inferior del primero sea algo inferior al menor valor que toma la variable y el extremo superior del último sea algo superior al mayor valor de la variable.	Extremo inferior del primer intervalo: 29,5 Intervalos: [29,5, 36,5), [36,5, 43,5), [43,5, 50,5), [50,5, 57,5), [57,5, 64,5), [64,5, 71,5). Extremo superior del último intervalo: 71,5

Intervalo	Recuento	Frecuencia absoluta (n_i)
[29,5, 36,5)	|	1
[36,5, 43,5)	|	
[43,5, 50,5)		3
[50,5, 57,5)		11
[57,5, 64,5)		9
[64,5, 71,5)		5

Tabla 2

Una vez efectuada la distribución en intervalos, elaboramos la tabla de frecuencias de forma parecida a como se hizo en el caso de datos no agrupados.

—Construimos una tabla con tres columnas.

—En la primera columna, anotamos los intervalos de clase calculados, ordenados de menor a mayor.

—En la segunda columna, trazamos un pequeño segmento cada vez que aparece un dato correspondiente a un determinado intervalo.

—En la tercera columna, anotamos, para cada intervalo, el número total de segmentos trazados. Este número es la frecuencia absoluta (ni) de dicho intervalo.

En el margen puedes ver la tabla de frecuencias correspondiente a las puntuaciones anteriores (tabla 2).

A veces, conviene añadir una columna entre la primera y la segunda, indicando en ella los puntos medios de los intervalos, denominados marcas de clase.

Intervalo	Marca de clase	Recuento	...
[29,5, 36,5)	33	|	....
[36,5, 43,5)	40	|	....
....	....	....	....

La tabla de frecuencias absolutas puede completarse con las frecuencias relativas y las frecuencias acumuladas de cada valor (o intervalo de clase si los datos están agrupados en intervalos). Recordemos sus definiciones:

- La frecuencia relativa (fi) de un valor es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos.
- La frecuencia absoluta acumulada (Ni) de un valor es el resultado de sumar a su frecuencia absoluta las frecuencias absolutas de los valores anteriores.
- La frecuencia relativa acumulada (Fi) de un valor es el resultado de sumar a su frecuencia relativa las frecuencias relativas de los valores anteriores.

Así, la tabla 1 se completa como puedes observar a la derecha.

Actividades

4. Un equipo de baloncesto en 20 partidos ha anotado los siguientes puntos: 80, 101, 92, 80, 110, 83, 101, 75, 80,107, 75, 85, 80, 110, 101, 92, 85, 110, 85, 80.

   —**Construye** la tabla de frecuencias correspondiente.

5. Las calificaciones obtenidas por un grupo de 49 alumnos en una prueba son las siguientes: 3,0; 5,5; 4,4; 6,0; 4,3; 7,2; 4,7; 6,5; 6,7; 4,0; 5,9; 5,8; 1,4; 3,2; 5,8; 4,6; 4,1; 3,5; 6,8; 5,0; 5,9; 2,1; 4,2; 4,5; 4,1; 4,8; 2,8; 4,7; 7,7; 6,0; 3,0; 5,7; 4,5; 4,9; 3,3; 4,8; 4,7; 7,7; 6,0; 3,0; 5,7; 4,5; 4,9; 3,3; 4,8; 4,7; 5,2; 3,8; 6,1.

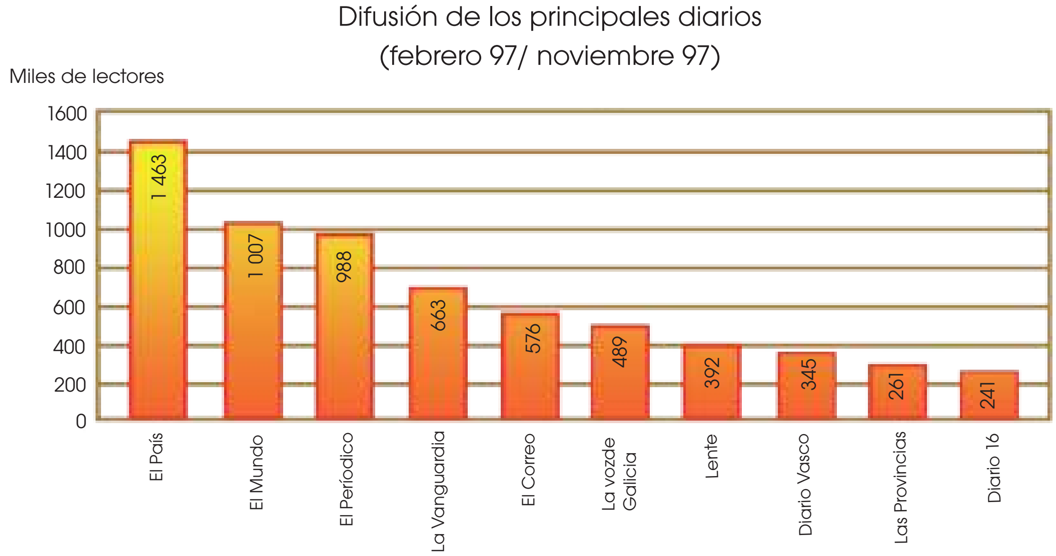
   —**Agrupa** en siete intervalos los datos anteriores y construye la tabla de frecuencias correspondiente.

4. GRÁFICOS

La información contenida en las tablas estadísticas puede expresarse mediante gráficos estadísticos.

En caso de que los datos no estén agrupados los más empleados son:

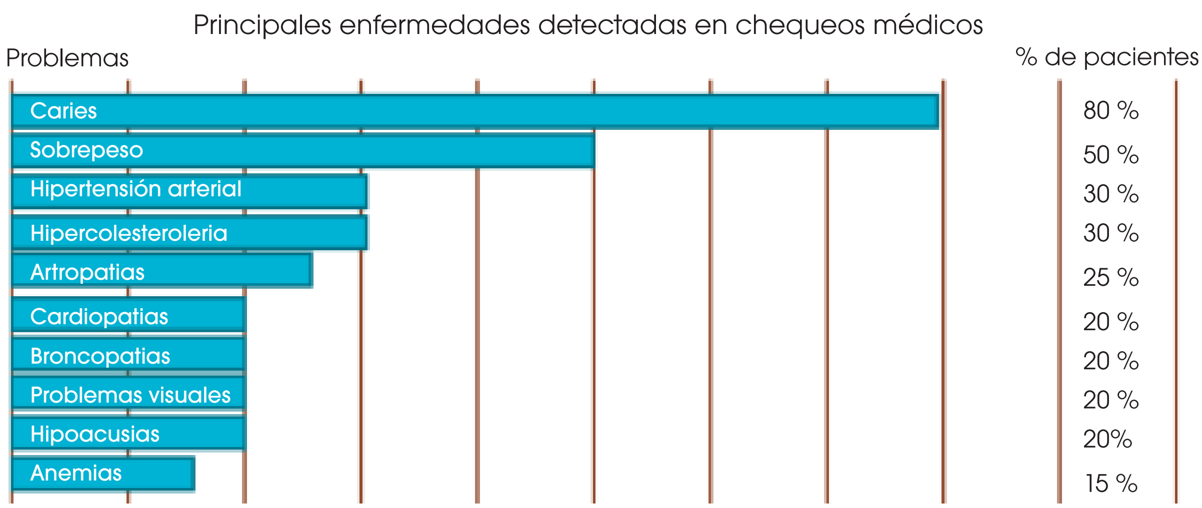
Diagrama de barras



Sobre unos ejes de coordenadas se representan, en el eje de abscisas, los diferentes valores de la variable y, en el eje de ordenadas, las frecuencias absolutas o relativas.

Sobre cada valor de la variable, se levanta una barra de altura igual a la frecuencia absoluta correspondiente.

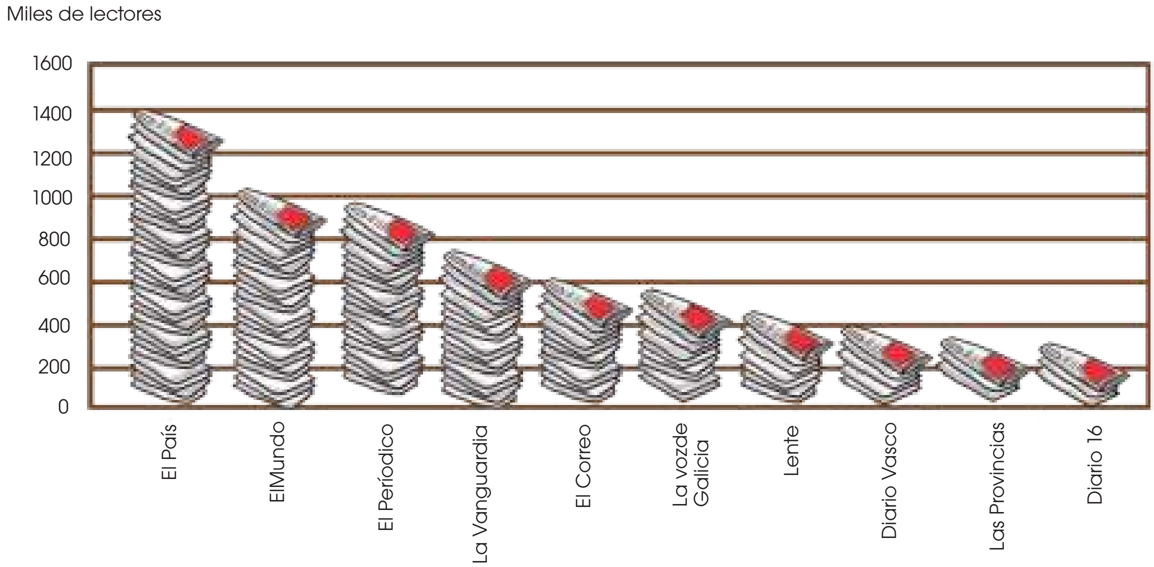
Diagrama de barras horizontal



Es un diagrama de barras pero con la posición de los ejes invertida: en el eje de abscisas se representa la frecuencia y en el eje de ordenadas, los valores de la variable.

Pictograma

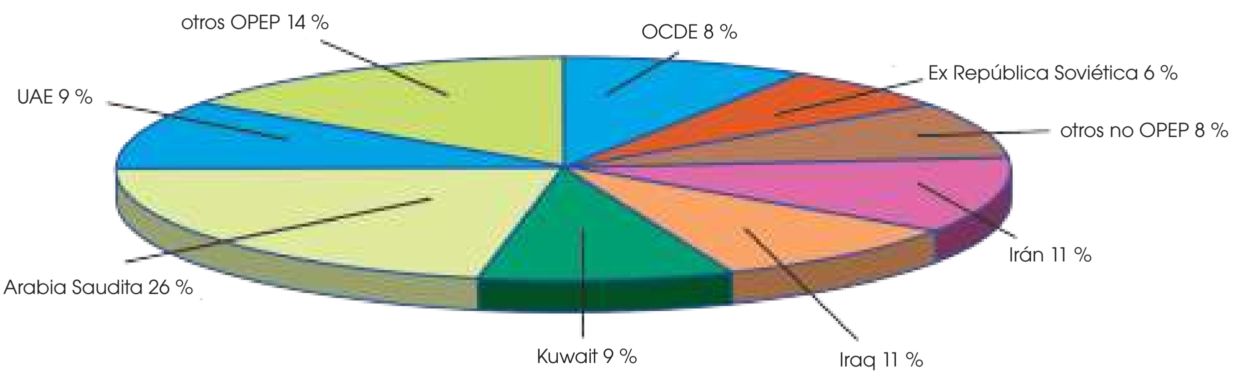
Difusión de los principales diarios
(febrero 97/ noviembre 97)



Es un diagrama de barras en el que estas se han sustituido por dibujos representativos de la variable estudiada.

Diagrama de sectores

Distribución de reservas de petróleo
(En miles de millones de barriles)

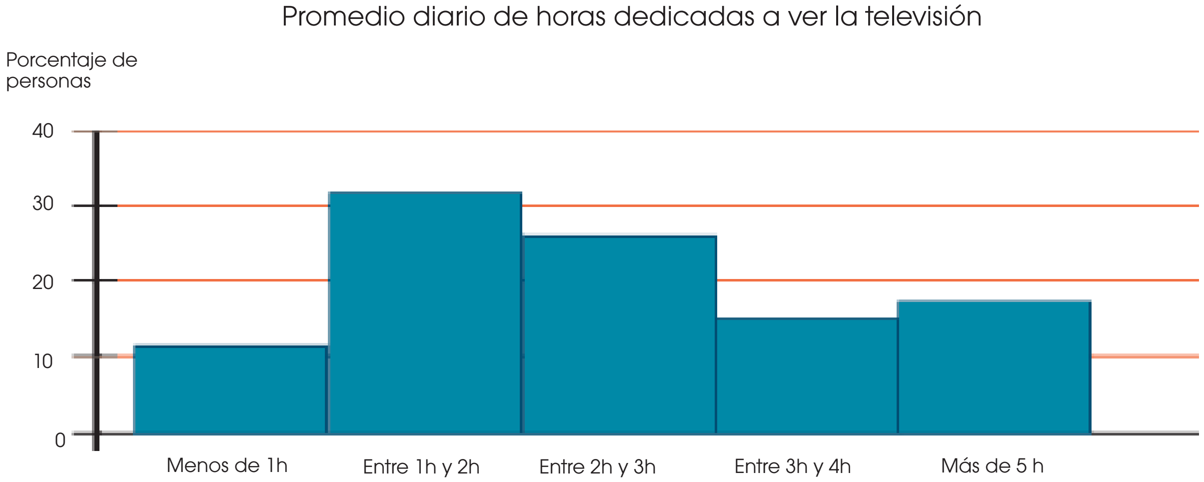


Se divide un círculo (a veces un semicírculo) en sectores de amplitud proporcional a las frecuencias de los valores que toma la variable. Este gráfico se suele acompañar con el tanto por ciento que representa cada sector.

La amplitud de cada sector se calcula por proporcionalidad, teniendo en cuenta que todo el círculo (360°) corresponde al total de individuos.

Para representar datos agrupados se suelen utilizar los histogramas y los polígonos de frecuencias.

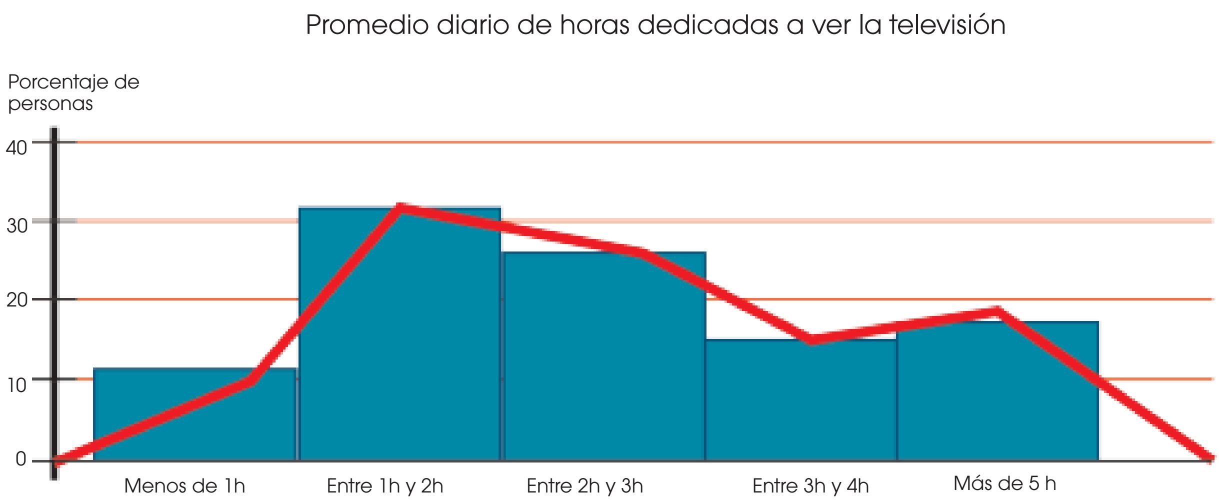
Histograma



Se representan sobre el eje de abscisas los intervalos de clase y sobre el eje de ordenadas, la frecuencia absoluta o relativa.

Sobre cada intervalo se levanta un rectángulo de altura igual a su frecuencia, siempre que los intervalos tengan la misma amplitud. Si no es así, se han de levantar rectángulos cuya área sea proporcional a las correspondientes frecuencias.

Polígono de frecuencias



En los histogramas es frecuente trazar una línea poligonal que una los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos. Esta línea se denomina polígono de frecuencias.

Si se construye el histograma con las frecuencias acumuladas, la línea obtenida al trazar el polígono de frecuencias recibe el nombre de ojiva.

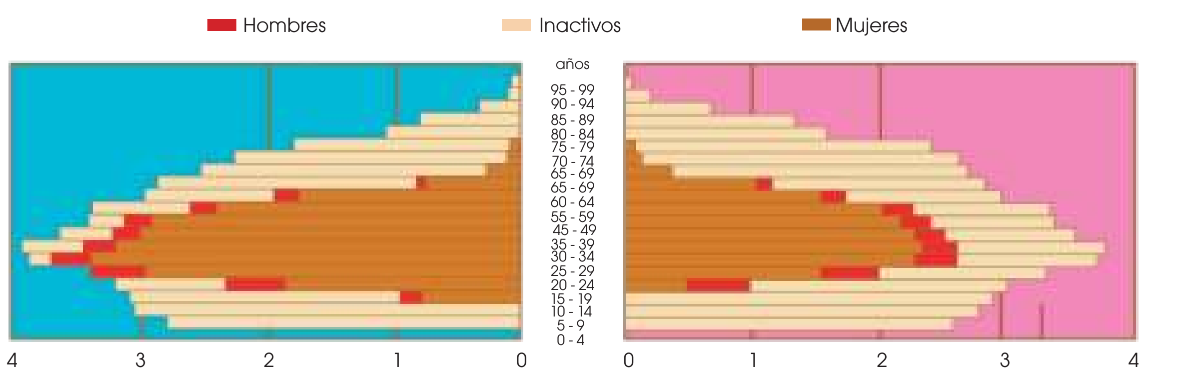
Para representar datos referidos a una región, suele emplearse un tipo de gráfico característico: los cartogramas.

Asimismo, en estudios demográficos y sociales son muy empleadas las denominadas pirámides de población.

Cartograma

Son mapas coloreados por zonas, según los valores que toma la variable. Van acompañados de un código que indica el significado de cada color.

Pirámide de población



Son dos histogramas horizontales que comparten el eje que contiene los intervalos de clase. En uno de ellos, se representan los datos correspondientes a la distribución por edades del sexo masculino y en el otro, los del sexo femenino.

4.1 Gráficos evolutivos y comparativos

Además de los gráficos estudiados, existen otros tipos de gráficos.

Los gráficos evolutivos se utilizan para representar la evolución en el tiempo de una determinada variable.

Para construir un gráfico evolutivo, se siguen estos pasos:

—Trazamos unos ejes de coordenadas.

—El eje de abscisas se toma como eje temporal, es decir, sobre el representamos los diferentes periodos de tiempo. Sobre el eje de ordenadas, representamos los distintos valores de la variable.

—Representamos mediante puntos los pares formados por cada periodo y el valor correspondiente de la variable, y los unimos mediante una línea poligonal.

El siguiente gráfico muestra la evolución del Euribor desde el año 1994 al 2005.

En ocasiones, se superponen dos o más gráficos con el fin de comparar los datos representados en ellos. Se habla entonces de gráficos comparativos

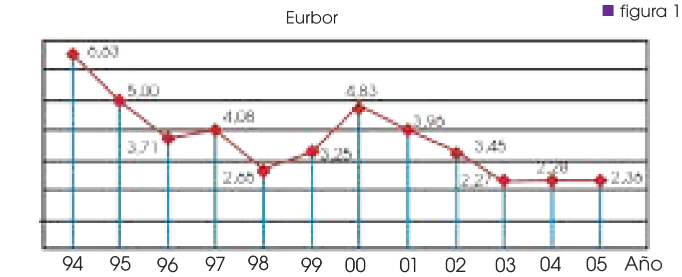


figura 1

Evolución mundial de líneas telefónicas (millones)

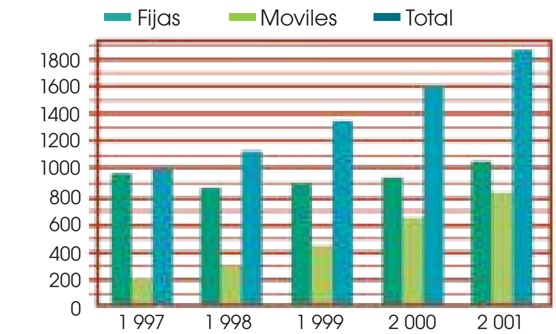


figura 2

Evolución del IPC

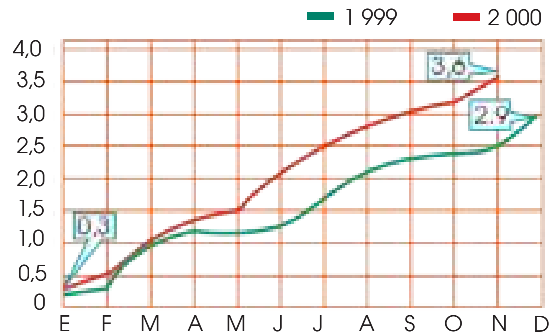


figura 3

Actividades

6. **Representa** los datos del ejercicio 4 página 209 mediante un diagrama de barras y un pictograma.

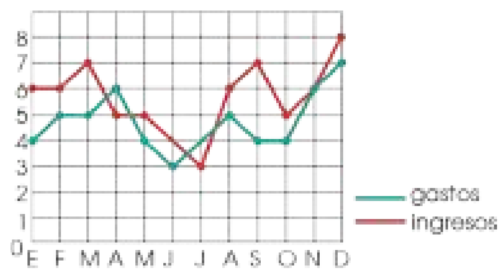
7. **Representa** los datos del ejercicio 5 página 209, mediante un histograma y **traza** el polígono de frecuencias.

8. La siguiente tabla recoge la distribución de alumnos del curso 2000-2001 en los diferentes niveles:

Enseñanzas	Alumnos
Infantil	1 142 981
Primaria	2 478 256
Secundaria	1 942 311
Bachillerato y FP	1 228 130
Universitaria	1 590 000

—**Elabora** el diagrama de sectores correspondiente.

9. El siguiente gráfico muestra los gastos y los ingresos, en miles de euros, de una empresa a lo largo del último año..



—**Construye** el gráfico evolutivo que refleje las ganancias correspondientes a cada mes.

5. TABLAS Y GRÁFICOS CON COMPUTADORA

	A	B	C
1	Jugador	Puntos	Minutos
2	Juan	10	15
3	Nacho	9	27
4	Omar	3	24
5	Diego	26	24
6	David	14	32
7	Álvaro	8	3
8	Vicente	10	28
9	Ricardo	1	21
10	Pedro	7	26

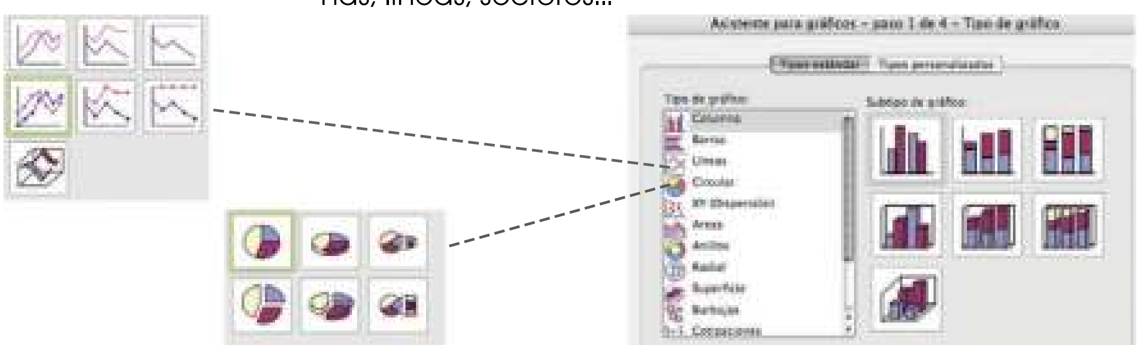
Una hoja de cálculo puede servir para confeccionar distintos tipos de gráficos estadísticos.

Veamos, por ejemplo, el caso de la estadística de los jugadores de un equipo de baloncesto en lo relativo a puntos conseguidos y minutos jugados.

En primer lugar, debemos introducir en las celdas de la hoja de cálculo, en forma de tabla, la información recogida en el estudio.

A continuación, en el menú Insertar elegimos la opción Gráficos. A lo largo de cuatro pasos podemos definir las distintas características del gráfico.

En el paso 1 se seleccionamos el tipo de gráfico: columnas, líneas, sectores...



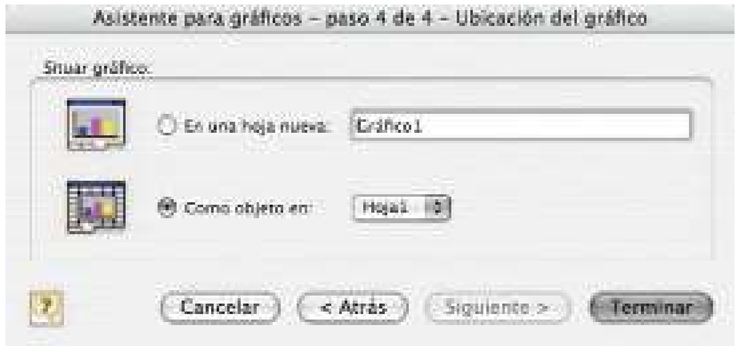
—En el paso 2, la información que hemos introducido en las columnas, las series de datos y sus títulos, se relacionan con la posición que debe tener en la gráfica.

—En el paso 3 definimos: las leyendas del título y de los ejes, los tipos de líneas de división, los rótulos de datos (valores y porcentajes) y la tabla de datos.

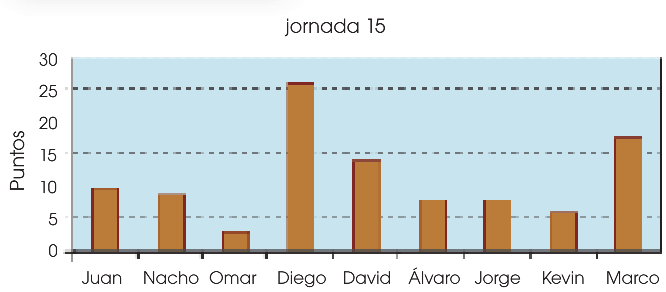
TIC

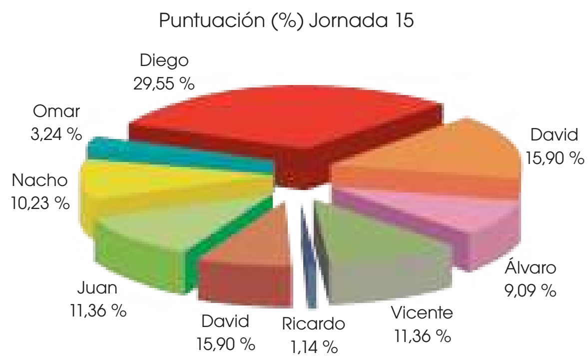
Si accedes a la página http://aula.elmun do.es/aula/ laminas.html, podrás averiguar cuántos colores son necesarios para colorear un mapa sin que dos zonas limítrofes tengan el mismo color.

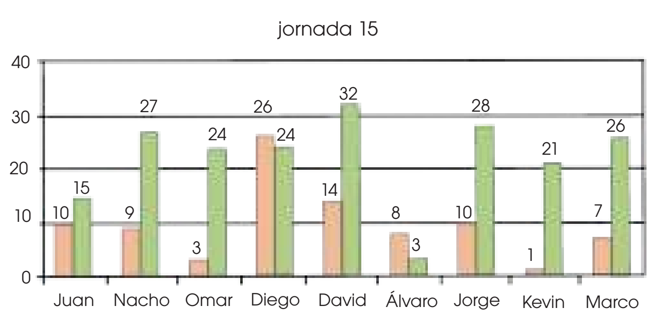
—Finalmente, en el paso 4, se indica la ubicación del gráfico que acabamos de confeccionar.

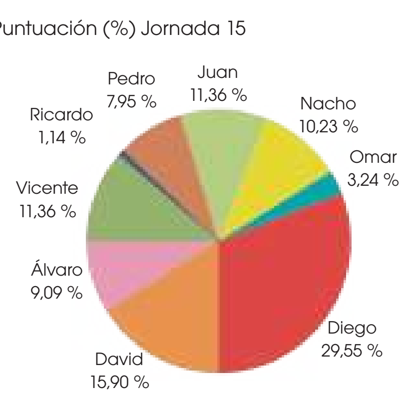


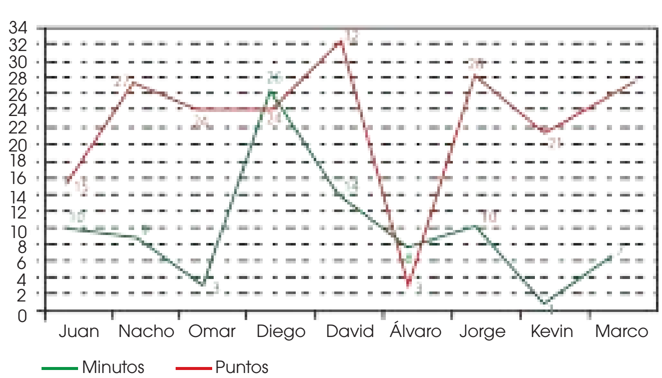
Una vez confeccionado el gráfico se pueden modificar aspectos como el tipo de fuente de la letra, la alineación, los distintos colores que aparecen, la intensidad de las líneas, las escalas de los valores de los ejes











6. ANÁLISIS DE DATOS. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

La etapa final de un estudio estadístico es el análisis de los datos recogidos con el fin de extraer conclusiones que puedan ser de interés.

En el caso de la estadística unidimensional, la información contenida en tablas y gráficos puede ser descrita mediante ciertos valores, denominados parámetros o medidas estadísticas. Estas medidas pueden ser de centralización, de dispersión o de posición.

El objetivo principal de las medidas de tendencia central es poder representar por medio de un solo número al conjunto de datos, es decir, dar valores representativos de la distribución de frecuencias, situados en algún lugar intermedio, alrededor del cual, se encuentran los otros valores. Nos indican dónde tienden a concentrarse los valores.

Las medidas de centralización son valores considerados representativos de la serie de datos. Los más utilizados son: la moda, la media aritmética y la mediana.

Número de hijos de las familias de 40 alumnos de 1.° de Bachillerato

Número de hijos (x_i)	Frecuencia absoluta (n_i)
1	7
2	14
3	9
4	8
5	2

Tabla 3

Duración (en horas) de 30 focos

Número de horas	Frecuencia absoluta (n_i)
(310, 420)	1
(420, 530)	9
(530, 640)	11
(640, 750)	5
(750, 860)	3
(860, 970)	1

Tabla 4

Parámetros de centralización

Los más usuales son la moda, la media aritmética y la mediana. Recordemos sus definiciones y cómo se calculan según se trate de datos agrupados o no.

—Moda: es el valor de la variable con mayor frecuencia absoluta. Se representa por Mo.

Si los datos están agrupados en intervalos, se toma como valor aproximado de la moda la marca de clase del intervalo con mayor frecuencia absoluta, que se llama clase modal.

Puede ocurrir que la moda no sea única, es decir, que haya más de un valor con la frecuencia máxima. Se habla entonces de distribuciones bimodales, trimodales.

Para obtener el valor de la moda, basta observar en la tabla de frecuencias correspondiente el valor de la variable (o el intervalo de clase si los datos están agrupados) con mayor frecuencia absoluta.

Así, para los datos de la primera tabla 3, la moda es 2.

En el caso de la segunda tabla 4, la clase modal es (530, 640) y tomaremos como valor aproximado de la moda su marca de clase: 585.

—Media aritmética: es el valor que se obtiene al dividir la suma de todos los valores de la variable entre el número total de estos. Se representa por $\overline{x}$.

Si los datos están agrupados en intervalos, se toman como valores las marcas de clase.

Se calcula mediante la expresión:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot n_i}{N} = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot f_i$$

Así, para los datos de la tabla 3:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 7 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 2}{40} = \frac{104}{40} = 2,6$$

Análogamente obtenemos, para los datos de la tabla 4, $\overline{x}$ = 596.

donde: x_1 : Variable (marca de clase); n_i : Frecuencia absoluta; N : Número de datos

—Mediana: es el valor que ocupa el lugar central en un conjunto ordenado de datos. Se representa por Me.

El cálculo de la mediana solo tiene sentido para variables cuantitativas.

Cuando el número de datos es impar, la mediana es el valor central de la serie ordenada de datos. Si es par, no existe un valor que ocupe el lugar central de la lista, sino dos. En este caso, tomaremos como mediana el valor promedio de ambos.

Así, en la siguiente serie de datos:

20, 20, 23, 23, 25, 25, 25, 26, 29

la mediana es 25, mientras que en la serie:

20, 20, 23, 23, 24, 25, 25, 25, 26, 29

la mediana es:

$$\frac{24 + 25}{2} = 24{,}5$$

Y TAMBIÉN: ¿?

La mediana deja por debajo y por encima el 50 % de la distribución de datos.

Podemos obtener también la mediana a partir de la tabla de frecuencias.

Para ello, basta observar en la columna de frecuencias absolutas acumuladas si existe un valor igual a $\frac{N}{2}$.

- En este caso, la mediana es el promedio entre dicho valor y el siguiente.
- En caso contrario, la mediana es el primer valor cuya frecuencia absoluta acumulada es mayor que $\frac{N}{2}$.

x_i	n_i	N_i
1	7	7
2	13	20
3	10	30
4	7	37
5	3	40

Tabla 5

Ejemplo 2

Calculemos la mediana de la distribución de la primera tabla 5.

El número total de individuos es N = 40. Luego el valor de $\frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20$

Existe una frecuencia absoluta acumulada que coincide exactamente con $\frac{N}{2}$

En este caso, la mediana es el promedio entre el valor de la variable con esta frecuencia y el siguiente:

$$Me = \frac{2 + 3}{2} = 2{,}5$$

x_i	n_i	N_i
1	7	7
2	14	21
3	9	30
4	8	38
5	2	40

Tabla 6

Ejemplo 3

Calculemos la mediana de la distribución de la segunda tabla 6.

El número total de individuos es N = 40. Luego el valor de $\frac{N}{2}$ es:

$$\frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

La primera frecuencia absoluta acumulada mayor que 20 es 21. La mediana será el valor de la variable con esta frecuencia acumulada, es decir, 2.

$$Me = 2$$

Si los datos están agrupados en intervalos, el intervalo que contiene a la mediana se denomina clase medianal. La marca de clase de este intervalo puede tomarse como valor aproximado de la mediana, aunque esta puede determinarse con mayor precisión a partir de la expresión:

$$Me = L_i + h \cdot \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i}$$

siendo:

—L_i, el extremo inferior de la clase medianal.

—h, la amplitud de los intervalos de clase.

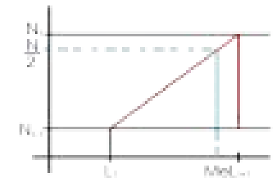
—N, el número de datos.

—N_{i-1}, la frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior a la clase medianal.

—n_i, la frecuencia absoluta de la clase medianal.

Y TAMBIÉN: ¿?

El valor de la mediana se puede obtener geométricamente aplicando el teorema de Tales a los triángulos de la figura.



Ejemplo 4

Calculemos la mediana de la distribución de la tabla sobre tiempo de duración de los focos.

Intervalo	Marca de clase	n_i	N_i
[310, 420)	365	1	1
[420, 530)	475	9	10
[530, 640)	585	11	21
[640, 750)	695	5	26
[750, 860)	805	3	29
[860, 970)	915	1	30

En este caso $\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$ La primera frecuencia absoluta acumulada mayor que 15 es 21. Luego la clase medianal es [530, 640). Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} L_i = 530 \\ h = 110 \\ N = 30 \\ N_{i-1} = 10 \\ n_i = 11 \end{array}\right\} \quad Me = 530 + 110 \cdot \frac{15 - 10}{11} = 580$$

Esto significa que la mitad de los focos tiene una duración inferior a 580 h.

Actividades

10. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana para los datos del ejercicio 4 página 209.

11. El número de faltas de ortografía cometidas por 40 alumnos de 1.° de Bachillerato en un dictado se muestra en la siguiente tabla:

Número de faltas	0	1	2	3	4	5	6
Número de alumnos	7	9	13	6	3	1	1

—**Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana.

12. La siguiente tabla refleja la medida del tórax de un grupo de varones adultos. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana.

Medida del tórax (cm)	Número de individuos
[80, 85)	9
[85, 90)	91
[90, 95)	509
[95, 100)	937
[100, 105)	694
[105, 110)	201
[110, 115)	31
[115, 120)	2

7. MEDIDAS DE DISPERSIÓN PARA DATOS NO AGRUPADOS

Los parámetros de dispersión de un conjunto de datos nos informan sobre la dispersión de los datos considerados, es decir, nos dicen si estos están más o menos separados.

Existen diferentes parámetros de dispersión. Los más utilizados son el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Recorrido

Es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la serie de datos. También se conoce como rango o amplitud, y se representa por r.

Así, si consideramos la serie de datos de la variable estadística que representa la edad de los 16 alumnos de un curso de astronomía, tenemos:

12 15 15 16 18 19 19 19 22 23 24 24 25 30 31 49

Por lo que el recorrido de esta serie de datos es:

$r = 49 - 12 = 37$

El recorrido es un parámetro fácil de calcular, pero que ofrece una información muy limitada. Así, nos da una idea de la amplitud del conjunto de datos, pero está muy influido por los valores extremos.

Desviación media.

La desviación media es la media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media. Se representa por D_m.

En general, escribimos abreviadamente: $D_m = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \bar{x}|}{N}$ utilizar $D_m = \dfrac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$

Ejemplo 5

Calculemos la desviación media de la distribución: 5, 3, 7, 8, 5, 8, 5, 7, 9, 3, 3

1. Calculemos la media aritmética del conjunto de datos:

$$\bar{x} = \frac{5+3+7+8+5+8+5+7+9+3+3}{11} = \frac{63}{11} = 5{,}7$$

2. Apliquemos la fórmula para calcular la desviación media:

$$D_m = \frac{|5-6|+|3-6|+|7-6|+|8-6|+|5-6|+|8-6|+|5-6|+|7-6|+|9-6|+|3-6|+|3-6|}{11}$$

$$D_m = \frac{1+3+1+2+1+2+1+1+3+3+3}{11} = \frac{21}{11} = 1{,}9$$

La desviación media se puede utilizar como medida de dispersión en todas aquellas distribuciones en las que la medida de tendencia central más significativas haya sido la media. Sin embargo, para las mismas distribuciones es mucho más significativa la desviación típica, que estudiaremos a continuación, y eso hace que el uso de la desviación media sea cada vez más restringido.

Actividades

13. Son encuestados veinte matrimonios respecto a su número de hijos y se obtuvieron los siguientes datos:

    2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 1 ; 2 ; 4 ; 2 ; 3 ; 0 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 2 ; 6 ; 2 ; 3; 2; 2.

    Halla la desviación media.

14. Los siguientes datos muestran el número de vuelos internacionales recibidos en el aeropuerto de la ciudad de Quito durante un mes, **construye** una tabla de distribución de frecuencias y **halla** la desviación media.

    10, 15, 10,16, 15,12,12,10,15,12,12,16,10,13,12,11,10,11,15,15,16,14,14,14,10,11,10,15,15,16.

Varianza

Nos indica la variabilidad de los datos, es decir que tan alejados están los datos de su media.

Es la media aritmética de los cuadrados de las diferencias o desviaciones de cada dato hasta la media:

Varianza poblacional (para una población: $\sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{N}$

Varianza muestral
(para una muestra): $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})}{N-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N-1} - \overline{x}^2$

El símbolo σ es la letra griega sigma. Corresponde a la «s» de nuestro alfabeto.

Desviación típica o desviación estándar

Es sin duda la medida de dispersión más importante, ya que sirve como medida previa al cálculo de otros valores estadísticos.

La desviación típica se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media de la distribución. Es decir: la raíz cuadrada de la varianza.

Para el caso de una población $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum |x - \overline{x}|^2}{N}}$

Para el caso de una muestra $s = \sqrt{\dfrac{\sum (x - \overline{x})^2}{N - 1}}$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Y TAMBIÉN: ¿?

Una fórmula alternativa para el cálculo de la varianza es:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2$$

Para obtener la varianza a partir de esta expresión, completamos la tabla de frecuencias con las siguientes columnas:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$

Y TAMBIÉN: ¿?

Dos propiedades importantes de la varianza son:

1. La varianza de una constante es cero
2. Si se tiene la varianza s^2 de un conjunto de datos y a cada observación se multiplica por una constante b, entonces la nueva varianza de los datos se obtiene multiplicando a la varianza de los datos por b^2.

Ejemplo 6

La muestra obtenida de las puntuaciones en un examen por grupo de estudiantes es la siguiente: 6, 8, 10, 12, 14. Hallemos la desviación estándar de la muestra.

1. Hallemos la media del conjunto de datos: $\overline{x} = \dfrac{6 + 8 + 10 + 12 + 14}{5} = \dfrac{50}{5} = 10$

2.

x	6	8	10	12	14	
$\lvert x - \overline{x} \rvert$	4	2	0	2	4	
$\lvert x - \overline{x} \rvert^2$	16	4	0	4	16	= 40

Luego $s = \sqrt{\dfrac{40}{4}}$

Actividades

15. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de estudiantes en un examen han sido las siguientes:

    15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13.

    a. **Construye** la tabla de distribución de frecuencias.

    b. **Calcula** las medidas de tendencia central de los datos.

    c. **Halla** la desviación típica.

16. El número de estrellas de los hoteles de una ciudad viene dado por la siguiente serie:

    3, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 5, 3, 3, 3, 2, 3,5, 2, 3, 3, 3, 2, 5, 5, 2, 2, 3, 2, 1, 5, 1, 2, 2, 4, 5.

    a. **Construye** la tabla de distribución de frecuencias.

    b. **Halla** la calificación promedio de los hoteles según la cantidad de estrellas

    c. **Calcula** la desviación típica.

Y TAMBIÉN: ¿?

Utilizamos s para muestras pequeñas y σ para muestras grandes

Y TAMBIÉN: ¿?

La aplicación de los procedimientos estadísticos se remonta hacia el año 3050 a. C., cuando se efectuó en Egipto un registro de la población y la riqueza con el fin de preparar la construcción de las pirámides.

Posteriormente, egipcios, griegos y romanos, efectuaron algunos censos con fines tributarios, sociales y militares, y mucho más tarde, en el siglo XVI, se publicaron en Alemania, Italia y Francia inventarios estadísticos.

Aunque en un principio la estadística surge a partir de la elaboración de censos, actualmente se extiende su aplicación a numerosos campos, como la agricultura, la biología, la psicología, la enseñanza, etc.

Ejemplo 7

Las temperaturas máximas en la ciudad de Esmeraldas durante el mes de junio fueron:

http://goo.gl/mUfWGZ

30 ºC, 29 ºC, 28 ºC, 30 ºC, 33 ºC, 29 ºC, 30 ºC, 31 ºC, 29 ºC, 29 ºC, 30 ºC, 31 ºC, 31 ºC, 31 ºC, 32 ºC, 33 ºC, 34 ºC, 34 ºC, 28 ºC, 31 ºC, 31 ºC, 32 ºC, 32 ºC, 33 ºC, 33 ºC, 31 ºC, 32 ºC, 32 ºC, 33 ºC, 33 ºC.

Hallemos la desviación estándar de las temperaturas a su media

Solución:

1. Se trata de una población porque nos dan las temperaturas de todo el mes, por tanto aplicaremos la fórmula de la desviación estándar para una población, es decir:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum |x - \bar{x}|^2}{N}}$$

2. Calculemos la temperatura promedio, la media aritmética, para ello elaboramos la tabla de frecuencia:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	$\lvert x - \bar{x} \rvert^2$
28	2	56	3	9
29	4	116	2	4
30	4	120	1	1
31	7	217	0	0
32	5	160	1	1
33	6	198	2	4
34	2	68	3	9
N =	30	935		28

$$\bar{x} = \frac{935}{30} = 31{,}17 \approx 31\,°C$$

3. Luego, sustituiremos en la fórmula los valores obtenidos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{28}{30}} = \sqrt{0{,}93\bar{3}} = 0{,}966$$

Actividades

17. Los siguientes datos corresponden a una muestra de estaturas de los jugadores de un equipo de futbol: 1,80; 1, 70; 1,69; 1,70; 1,65; 1,75; 1, 65; 1,80, 1,64

Calcula:

a. Las medidas de tendencia central

b. la desviación media

c. la desviación estándar

8. MEDIDAS DE DISPERSIÓN PARA DATOS AGRUPADOS

Cuando los datos aparecen agrupados en intervalos, los parámetros de dispersión se calculan de esta manera.

Recorrido

En caso de que los datos estén agrupados en intervalos, suele considerarse como recorrido la diferencia entre el extremo superior del último intervalo y el extremo inferior del primero.

Desviación media, varianza y desviación típica: consideramos las marcas de clase de los diferentes intervalos como diferentes valores de la variable x_i y sus frecuencias absolutas como n_i.

Desviación media: Es la media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media aritmética. Se representa por dm.

En general, escribimos abreviadamente:

x_i: valor de la variable

$\overline{x}$: media aritmética

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \overline{x}| \cdot n_i}{N}$$

n_i: frecuencia absoluta de x_i

N : número total de datos

Ejemplo 8

Calculemos el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la distribución de datos que recoge la tabla.

Intervalo de clases	[100, 120)	[120, 140)	[140, 160)	[160, 180)	[180, 200)	[200, 220)
n_i	5	6	15	18	17	5

Solución

Intervalos de clase	Marca de clase x_i	Frecuencia n_i	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert \cdot n_i$
[100, 120]	110	5	55,45	277,25
[120, 140]	130	6	35,45	212,70
[140, 160]	150	15	15,45	231,75
[160, 180]	170	18	4,55	81,90
[180, 200]	190	17	24,55	417,35
[200, 220]	210	5	44,55	222,75
	N = 66	N = 66		1443,70

$$d_m = \frac{1443{,}70}{66} = 21{,}87$$

—En este caso, puesto que los datos están agrupados por intervalos, el recorrido es la diferencia entre el extremo superior de último intervalo de clase y el extremo inferior del primer intervalo de clase. Luego, r = 220 - 110 = 120.

—Apliquemos la fórmula correspondiente para calcular la desviación media.

$$d_m = \frac{|110 - 165{,}45| \cdot 5 + |130 - 165{,}45| \cdot 6 + |150 - 165{,}45| \cdot 15 + |170 - 165{,}45| \cdot 18 + |190 - 165{,}45| \cdot 17 + |210 - 165{,}45| \cdot 5}{66} = 21{,}87$$

—Apliquemos la primera de las fórmulas para calcular la varianza.

$$\sigma^2 = \frac{|110 - 165{,}45|^2 \cdot 5 + |130 - 165{,}45|^2 \cdot 6 + |150 - 165{,}45|^2 \cdot 15 + |170 - 165{,}45|^2 \cdot 18 + |190 - 165{,}45|^2 \cdot 17 + |210 - 165{,}45|^2 \cdot 5}{66} = 712{,}67$$

—Puesto que $\sigma^2 = 712{,}67$ tendremos que la desviación tipica es $\sigma = \sqrt{712{,}67} = 26{,}70$.

Actividades

18. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana en la distribución de datos que aparece en esta tabla.

Intervalo de clases	[2, 8)	[8, 14)	[14, 20)	[20, 26)
n_i	6	14	7	3

CALCULADORA

Introducción de datos

—Ponemos la calculadora en modo estadístico SD .

—Borramos de la memoria los cálculos anteriores.

—Introducimos los datos, uno a continuación de otro, separados sólo por la tecla DATA :

x_1 DATA x_2 DATA ... x_n DATA

Si los datos estan tabulados en una tabla de frecuencias, los introducimos de la siguiente manera:

x_1 X n_1 DATA x_2 X n_2 DATA...

... x_k X n_k DATA

Obtención de parámetros estadísticos

—Para obtener la media aritmética, presionamos la tecla.

—Para obtener la desviación típica, presionamos la tecla $\bar{x}$.

—También podemos obtener otros resultados parciales: σ_n

Número de datos: n

Suma de todos los datos: Σx

Suma de los cuadrados de los datos: Σx^2

9. MEDIDAS DE POSICIÓN

Hemos visto que la mediana de una distribución de datos es el valor que ocupa el lugar central (o el promedio de los valores centrales si el número de datos es par). Por tanto, este valor deja por debajo el 50% de los datos y por encima el otro 50%, es decir, divide la distribución en dos mitades iguales.

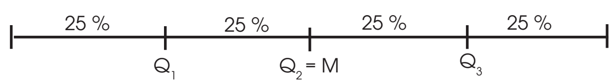
Podemos generalizar este concepto y considerar aquellos valores que dividen la distribución en cuatro partes iguales. Estos valores se denominan cuartiles.

—Primer cuartil: es el valor de la variable que deja por debajo el 25% de los datos. Se representa por Q_1.

—Segundo cuartil: es el valor de la variable que deja por debajo el 50% de los datos. Se representa por Q_2.

Es obvio que el segundo cuartil coincide con la mediana.

—Tercer cuartil: es el valor de la variable que deja por debajo el 75% de los datos. Se representa por Q_3.



Para calcular Q_1 y Q_3 se procede de manera análoga a como se hizo para la mediana. En el caso de datos no agrupados, basta con observar la columna correspondiente a las frecuencias absolutas acumuladas.

Se tiene:

- Si existe un valor cuya frecuencia absoluta acumulada coincide con $\frac{N}{4}$, Q_1 es el promedio entre dicho valor y el siguiente. En caso contrario, Q_1 es el primer valor que tiene una frecuencia absoluta acumulada mayor que $\frac{N}{4}$
- Si existe un valor cuya frecuencia absoluta acumulada coincide con $\frac{3N}{4}$, Q_3 es el promedio entre dicho valor y el siguiente. En caso contrario, Q_3 es el primer valor que tiene una frecuencia absoluta acumulada mayor que $\frac{3N}{4}$.

Si los datos están agrupados en intervalos, buscamos primero el intervalo que contiene al cuartil. Este será el primer intervalo con frecuencia absoluta acumulada mayor que $\frac{N}{4}$ en el caso de Q_1 o $\frac{3N}{4}$ en el caso de Q_3. A continuación, sustituimos en la expresión correspondiente:

$$Q_1 = L_i + h \cdot \frac{\frac{N}{4} - N_{i-1}}{n_1}$$

$$Q_3 = L_i + h \cdot \frac{\frac{3N}{4} - N_{i-1}}{n_1}$$

Siendo:

—L_i el extremo inferior del intervalo I que contiene a Q_1 (respectivamente a Q_3).

—h la amplitud de los intervalos de clase.

—N el número de datos.

—N_{i-1} la frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior a I.

—n_i la frecuencia absoluta del intervalo I.

De la misma manera, podemos dividir la distribución en cien partes iguales y considerar los valores que dejan por debajo de un porcentaje determinado (k %) de datos. Estos valores se denominan percentiles y se representan por Pk.

Para calcularlos se procede como en el caso de los cuartiles: buscamos el primer intervalo con frecuencia absoluta acumulada mayor que $\frac{kN}{100}$ y sustituimos en la expresión:

$$P_k = L_i + h \cdot \frac{\frac{kN}{100} - N_{i-1}}{n_1}$$

Y TAMBIÉN: ¿?

Los percentiles 10, 20, 30, ..., 90 se llaman deciles y se representan por D_i.

Así:

$D_1 = P_{10}$, $D_2 = P_{20}$, ..., $D_9 = P_{90}$

Ejemplo 9

Calcular Q_1, Q_3 y P_{81} para los datos de la tabla.

Completemos la tabla con la columna de frecuencias absolutas acumuladas como puedes observar en la tabla de la derecha.

x_i	n_i	N_i
1	7	7
2	14	21
3	9	30
4	8	38
5	2	40

- Para calcular Q_1, hallamos $\frac{N}{4} : \frac{N}{4} = \frac{40}{4} = 10$

  La primera frecuencia absoluta acumulada mayor que 10 es 21, que corresponde al valor 2. Luego: $Q_1 = 2$.

- Para calcular Q_3, hallamos $\frac{3N}{4} : \frac{3N}{4} = \frac{3 \cdot 40}{4} = 30$

  Existe una frecuencia absoluta acumulada igual a 30. Luego: $Q_3 = \frac{3 + 4}{2} = 3{,}5$

- Para calcular P_{81}, hallamos $\frac{81N}{100} : \frac{81N}{100} = \frac{81 + 40}{100} = 32{,}4$

  La primera frecuencia absoluta acumulada mayor que 32,4 es 38, que corresponde al valor 4. Luego $P_{81} = 4$.

Ejemplo 10

Calcular Q_3 y P_{81} para los datos de la tabla.

Completemos la tabla 4 página 217, (que corresponde a la duración en horas) con la columna de frecuencias absolutas acumuladas como puedes observar en la tabla de la derecha.

Intervalo	Marca de clase	n_i	N_i
[310, 420)	365	1	1
[420, 530)	475	9	10
[530, 640)	585	11	21
[640, 750)	695	5	26
[750, 860)	805	3	29
[860, 970)	915	1	30

- Para calcular Q_3, hallamos $\frac{3N}{4} : \frac{3N}{4} = \frac{3 \cdot 40}{4} = 30$

  La primera frecuencia absoluta acumulada mayor que 22,5 es 26, que corresponde al intervalo [640, 750). Luego:

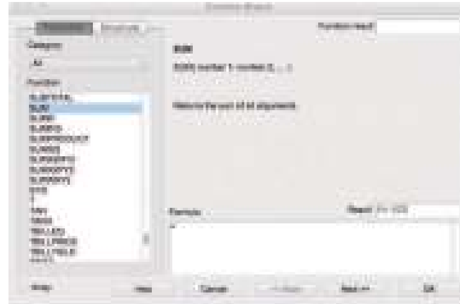
$$Q_1 = L_i + h \cdot \frac{\frac{N}{4} - N_{-1}}{n_1} = 640 + 110 \cdot \frac{22{,}5 - 21}{5} = 673$$

- Para calcular P_{81}, hallamos $\frac{81N}{100} : \frac{81N}{100} = \frac{81 \cdot 30}{100} = 24{,}3$

  Si ahora procedemos como en el caso anterior, se tiene:

$$P_{81} = 640 + 110 \cdot \frac{24{,}3 - 21}{5} = 712{,}6$$

10. USO DE TIC

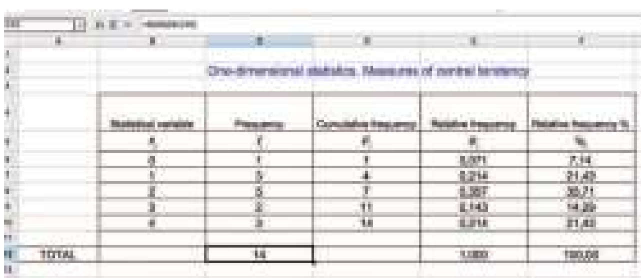


Las hojas de cálculo permiten a los usuarios elaborar tablas que incluyan cálculos matemáticos mediante fórmulas con operadores: + (suma), - (resta), * (multiplicación), / (división) y ^ (potenciación). Además, pueden utilizarse elementos denominados funciones, que son unas expresiones matemáticas preconfiguradas, como la suma, la media aritmética, la mediana, etc.

Los valores obtenidos en una hoja de cálculo pueden exportarse al programa GeoGebra, el cual permite su interpretación gráfica.

En primer lugar, se definen en la hoja de cálculo los parámetros que se quieren estudiar, escribiendo ordenadamente los datos del enunciado; es decir, *xi* y *fi*. A partir de estos datos, se crean las columnas necesarias para calcular los parámetros estadísticos requeridos.

Deben sumarse, multiplicarse y dividirse los diferentes valores de las celdas. Las operaciones pueden efectuarse de dos modos (A y B), en ambos casos la expresión debe comenzar con un signo «=».

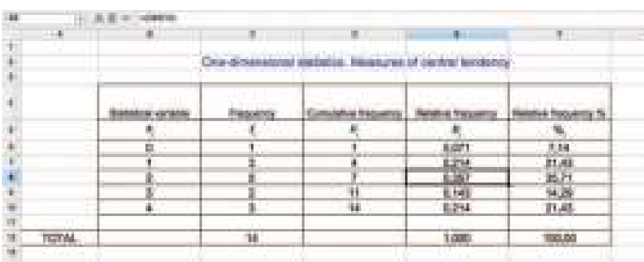


A. Buscando en el desplegable la fórmula que necesitamos e insertándola en la barra de fórmulas. Por ejemplo:

—En la celda C12 hemos insertado la función = suma (C6:C10)

—En la celda E8 se ha efectuado la operación = C8/D10

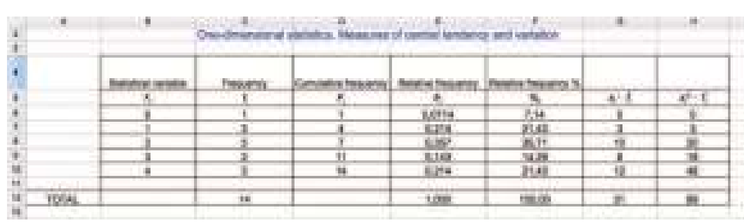
—En la celda F6 se ha aplicado la función = producto(E6;100)



B. Definiendo directamente la operación que queremos efectuar.

Se puede ampliar la tabla de frecuencias con las columnas necesarias para hallar los parámetros de dispersión como la varianza y la desviación típica.

La hoja de cálculo halla directamente el valor de estos parámetros, pero debe contener todos los valores de la variable estadística escritos y repetidos tantas veces como indique la frecuencia absoluta. Por este motivo, es preferible definir la fórmula que permite hallar dichos valores a partir de las nuevas columnas.



Actividades

19. Las hojas de cálculo permiten la representación gráfica de un conjunto de datos. **Lleva** a cabo una pequeña encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase preguntando el número de horas que ven semanalmente la televisión y, con los datos recogidos, **utiliza** un programa informático para representarlos gráficamente de distintas formas.

Problemas resueltos

A

1. Queremos comparar la duración de dos marcas de lentes de contacto blandas, Blandilente (B) y Lentisuave (L). Para ello observamos la duración (en semanas) de 10 pares de lentes de cada marca y obtenemos los resultados de la tabla adjunta. ¿Qué marca es aconsejable escoger?

B	144	142	140	141	145	144	139	141	142	144
L	143	143	148	136	142	150	134	142	134	150

Solución

—**Organizamos** los datos en tablas para calcular la media aritmética y la desviación típica de cada una de las distribuciones.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
139	1	139	19 321	19 321
140	1	140	19 600	19 600
141	2	282	19 881	39 762
142	2	284	20 164	40 328
144	3	432	20 736	62 208
145	1	145	21 025	21 025

$\sum_i^n x_i \cdot n_i = 1422$ $\qquad \sum_i^n x_i^2 \cdot n_i = 202\,244$

$$\overline{x} = \frac{\sum_i^n x_i \cdot n_i}{N} = \frac{1422}{10} = 142{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^n x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{202\,244}{10} - 142{,}2^2} = 1{,}89$$

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
134	2	268	17 956	35 912
136	1	136	18 496	18 496
142	2	284	20 164	40 328
143	2	286	20 449	40 898
148	1	148	21 904	21 904
150	2	300	22 500	45 000

$\sum_i^n x_i \cdot n_i = 1422$ $\qquad \sum_i^n x_i^2 \cdot n_i = 202\,538$

$$\overline{x} = \frac{\sum_i^n x_i \cdot n_i}{N} = \frac{1422}{10} = 142{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{202\,538}{10} - 142{,}2^2} = 5{,}74$$

La duración media de ambas marcas es la misma. Sin embargo, es aconsejable escoger la marca Blandilente, pues la desviación típica es mucho menor. Esto indica que, por lo general, la duración de estas lentillas se aleja poco de la duración media.

B

1. Considera la tabla 4 del ejemplo de los focos de la página 217. ¿Qué porcentaje de focos tiene una duración inferior a 620 h?

Solución

Sabemos que el percentil Pk es el valor de la variable que deja por debajo el k % de los datos. Por tanto, se trata de buscar cuál es el percentil cuyo valor es 620.

Puesto que 620 pertenece al intervalo (530, 640), debemos sustituir Li por 530, Ni − 1 por 10 y ni por 11 en la expresión que nos da Pk.

Así, se tiene:

$$620 = 530 + 110 \cdot \frac{\frac{k \cdot 30}{100} - 10}{11}$$

De donde, efectuando los cálculos correspondientes y despejando el valor de k, se obtiene k = 63,3.

Esto significa que el 63,3% de los focos tiene una duración inferior a 620 h.

Problemas resueltos

Veamos, mediante un ejemplo, cómo se interpretan los parámetros estadísticos de centralización y de dispersión en algunos problemas de la vida cotidiana.

C

1. Se desea estudiar cuál de los dos periódicos locales de una pequeña población ofrece más información cultural. Para ello, se cuentan las páginas de información cultural en las 100 últimas ediciones de cada periódico, y los datos obtenidos se muestran en estas tablas.

Solución

La voz del pueblo 1

Páginas	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	2	4	7	14	18	25	16	10	6

Total n_i = 102

Gaceta de la ciudad 2

Páginas	6	7	8	9	10
n_i	7	14	18	25	16

Total n_i = 80

Valoremos, a partir de estos datos, qué periódico puede resultar más interesante para un lector preocupado por temas culturales.

—**Calculamos** la media aritmética y la desviación típica de los datos correspondientes a ambos periódicos utilizando una calculadora.

$$\overline{x} = 8{,}62 \qquad \sigma = 1{,}84$$

$$\overline{x} = 8{,}36 \qquad \sigma = 1{,}14$$

—**Calculamos** el coeficiente de variación de los datos correspondientes a ambos periódicos.

$$CV_1 = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{1{,}84}{8{,}61} = 0{,}21$$

$$CV_2 = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{1{,}22}{8{,}36} = 0{,}15$$

La media aritmética de las páginas dedicadas a información cultural no es igual en ambos periódicos, pero la desviación estándar es menor en el caso de la Gaceta de la ciudad, por lo que podemos afirmar que sus datos están menos dispersos. Por esta razón, resulta preferible este periódico si se busca mayor oferta de información cultural.

Y TAMBIÉN: ¿?

Dos fracciones son equivalentes si verificamos: a · d = b · c.
Cualquier fracción es un número decimal limitado o ilimitado periódico.
Decimales limitados:-3,9; 4,25, 832...

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

A veces, el CV aparece como porcentaje.

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100$$

Dicho parámetro de dispersión permite considerar si la media aritmética es representativa del conjunto de datos. Así, un CV mayor del 15% indica que la media aritmética es poco representativa del valor central.

Además, el coeficiente de variación puede utilizarse para comparar dos series de datos. La serie que presente un CV menor es la serie más homogénea o menos dispersa.

D

1. Considera la distribución de datos agrupados en intervalos que aparece en la tabla y calculan la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Intervalo	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)	[7, 8)
n_i	2	4	7	5	8	7	9	5

Solución

—Comprensión del enunciado

Se trata de una serie de datos agrupados en intervalos. En estos casos consideramos las marcas de clase de los diferentes intervalos como los valores de la variable x_i, y sus frecuencias absolutas como las frecuencias n_i.

—Planificación de la resolución

Resolvemos el problema por cálculo manual. Para ello, disponemos los datos en una tabla estadística a partir de la cual calculamos todos los parámetros estadísticos de forma sencilla.

—Ejecución del plan

x_i		n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$\|x_i - \bar{x}\| \cdot n_i$	$\|x_i - \bar{x}\|^2$	$\|x_i - \bar{x}\|^2 \cdot n_i$
Intervalo de clse	Marca de clase							
[0, 1)	0,5	2	2	1	4,0213	8,0426	16,1709	32,3418
[1, 2)	1,5	4	6	6	3,0213	12,0852	9,1283	36,5132
[2, 3)	2,5	7	13	17,5	2,0213	14,1491	4,0857	28,5999
[3, 4)	3,5	5	18	17,5	1,0213	5,1065	1,0431	5,2155
[4, 5)	4,5	8	26	36	0,0213	0,1704	0,0005	0,004
[5, 6)	5,5	7	33	38,5	0,9787	6,8509	0,9579	6,7053
[6, 7)	6,5	9	42	58,5	1,9787	17,8083	3,9153	35,2377
[7, 8)	7,5	5	47	37,5	2,9787	14,8935	8,8727	44,3635
		47		212,5		79,1065		188,9809

- La clase modal es [6, 7), pues tiene la mayor frecuencia absoluta.

  Así, Mo = 6,5.

- La clase medianal es [4, 5), pues contiene el dato central, que es el que ocupa el lugar 24. Así, como aproximación a la mediana tomaremos Me = 4,5.

- $\bar{x} = \dfrac{212{,}5}{47} = 4{,}5213$
- $d_m = \dfrac{79{,}1065}{47} = 1{,}683$
- $\sigma = \sqrt{4{,}021} = 2{,}005$
- $r = 8 - 0 = 8$
- $\sigma^2 = \dfrac{188{,}9809}{47} = 4{,}021$

—Revisión del resultado y del proceso seguido

Revisamos el proceso, **repasamos** los cálculos efectuados y pensamos si el resultado obtenido para cada parámetro estadístico es razonable o no.

Problemas resueltos

E

Resolución gráfica

Muchas veces, la construcción de un gráfico que refleje las condiciones y los datos del enunciado conduce directamente a la solución del problema.

María ha comprado una bicicleta. La paga del siguiente modo: La mitad de su importe en el momento de llevársela; los dos tercios del resto, al cabo de un mes; y los $100 restantes, al cabo de otro mes. ¿Cuánto le ha costado la bicicleta?

Solución

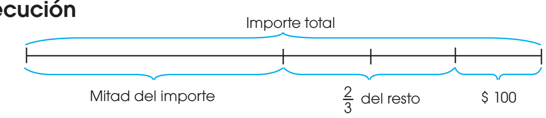
Comprensión del enunciado

Debemos hallar el precio de la bicicleta sabiendo que, después de pagar la mitad de su importe y los dos tercios del resto, quedan aún por pagar $100.

Planificación

Representamos el importe total de la bicicleta por un segmento y **situamos** en él los datos del enunciado.

Ejecución



De acuerdo con el gráfico vemos que el importe total es de:

$$(100 \times 3) \times 2 = \$\ 600$$

Respuesta: La bicicleta le ha costado a María 600 dólares.

F

Ensayo-error

Esta estrategia consiste en experimentar con posibles soluciones hasta dar con la correcta. Para ello seguimos estos pasos:

—**Escogemos** una posible solución.

—**Probamos** si esta solución satisface las condiciones del problema.

—**Modificamos** la solución escogida en función del resultado obtenido y **repetimos** el proceso hasta obtener la solución correcta.

Encuentra dos múltiplos consecutivos de tres cuyo producto sea 1638.

Solución

Comprensión del enunciado

Debemos hallar dos números que sean múltiplos consecutivos de tres, tales que al multiplicarlos nos den como resultado 1638.

Planificación

Tomamos dos múltiplos consecutivos de tres cualesquiera y calcularemos su producto. Si éste es mayor que 1638, tomamos otro par de números menor; si es menor, tomamos otro par de números mayor.

Ejecución

$$45 \cdot 48 = 2160 > 1638\ ;\ 39 \cdot 42 = 1638$$

Respuesta

Los números buscados son 39 y 42.

G

Razonamiento inverso

Esta estrategia se aplica en la resolución de problemas en los que conocemos el resultado final y queremos determinar un valor inicial o una serie de operaciones que nos conduzcan hasta él.

El método consiste en tomar el resultado como punto de partida e ir retrocediendo hasta llegar a la situación inicial.

Halla un número cuyo doble sea inferior en 49 unidades a 297.

Solución

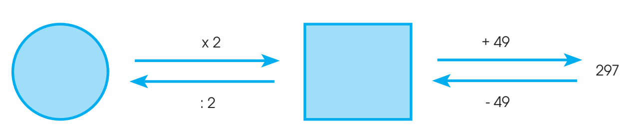
Comprensión del enunciado

Debemos hallar un número tal que al multiplicarlo por 2 y sumarle 49 nos dé como resultado 297.

Planificación

Partimos del resultado, 297, y efectuamos las operaciones inversas a las descritas en el enunciado hasta llegar al número buscado.

Ejecución



Respuesta

El número buscado es (297 − 49) : 2 = 124.

Problemas resueltos

H

Organización de la información

En muchos problemas, la realización de un esquema o tabla sobre los que disponer las condiciones y los datos del enunciado puede abrirnos el camino para abordar su resolución.

Una bomba A tarda 87h en vaciar el agua de un estanque, mientras que una bomba B tarda 57h en efectuar la misma tarea. ¿Qué tiempo se invertirá en el vaciado del estanque si funcionan las dos bombas a la vez?

Solución

Comprensión del enunciado

Llamaremos C a la capacidad del estanque; t_A y t_B, al tiempo que tarda cada bomba en vaciarlo; Q_1 y Q_2, al caudal de vaciado (litros vaciados por hora) de cada una de ellas; t, al tiempo que se invierte en el vaciado si las dos bombas funcionan a la vez, y Q, al caudal de vaciado (litros vaciados por hora) total.

En este caso, resulta útil organizar los datos en forma de tabla:

Bomba	Capacidad (l)	Tiempo (h)	Caudal (l/h)
A	C	$t_A = 87$	Q_1
B	C	$t_B = 57$	Q_2

Planificación

La relación $C = Q \cdot t$ nos permite escribir una ecuación para cada una de las bombas:

$$Q_A = \frac{C}{t_A} = \frac{C}{87} \qquad Q_B = \frac{C}{t_B} = \frac{C}{57}$$

Por otro lado, el caudal de vaciado total, Q, es la suma de los caudales de vaciado de cada bomba:

$$Q = Q_A + Q_B$$

Ejecución

$$Q = Q_A + Q_B \Rightarrow \frac{C}{t} = \frac{C}{87} + \frac{C}{87} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{87} + \frac{1}{57} \Rightarrow t = \frac{87 \cdot 57}{57 + 87} = 34{,}43\text{h}$$

Respuesta Las dos bombas invertirán 34, 43 h en vaciar por completo el estanque si funcionan simultáneamente.

I

Descomposición del problema

En ocasiones, es difícil ver la relación existente entre los datos y las incógnitas del problema. En estos casos, una de las estrategias que ofrece más posibilidades de éxito es la descomposición del problema en problemas más sencillos. Para aplicarla, debes seguir estos pasos:

—**Descompón** el problema inicial en subproblemas, sin perder de vista las relaciones existentes entre ellos.

—**Resuelve** cada uno de los subproblemas.

—**Resuelve** el problema inicial.

A veces, la solución del problema global coincidirá con la del último subproblema. Otras veces, será necesario combinar los resultados de los diferentes subproblemas para hallarla.

Halla el área de un hexágono regular de lado l.

Solución

Comprensión del enunciado

Se trata de encontrar la expresión que nos dé el área de un hexágono regular en función de su lado l.

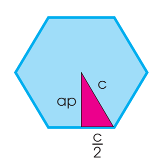
Planificación

La fórmula para calcular el área de un polígono regular es: $A = \dfrac{P \cdot ap}{2}$

En este caso debemos expresar el perímetro *P* y la apotema *ap* en función del lado del hexágono. Resolveremos entonces los siguientes subproblemas:

SP1. Expresar el perímetro de un hexágono regular en función del lado.

SP2. Expresar la apotema de un hexágono regular en función del lado.



$$P = 6 \times l$$

$$ap = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$$

$$A = \frac{6l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l}{2}$$

$$A = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, l^2$$

Problemas resueltos

J

Simplificación y búsqueda de regularidades

En ocasiones, la simplificación de los datos o de las condiciones del problema proporciona un nuevo punto de vista para su resolución. Muchas veces, ese nuevo punto de vista surge de la existencia de regularidades que permanecían ocultas antes de proceder a la simplificación.

Calcula la suma de los 100 primeros números naturales.

Solución

Comprensión del enunciado

Se trata de averiguar cuánto es la suma de los números naturales del 1 hasta el 100, es decir:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100 = ¿?$$

Planificación

Nos planteamos la resolución de un problema más simple, como es la suma de los 10 primeros números naturales:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Al calcular esta suma nos damos cuenta de que la suma de los términos equidistantes de los extremos es siempre la misma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6 = 11$$

Luego, para calcular la suma anterior, podemos sumar 5 veces 11. Así pues, el resultado es: $5 \times 11 = 55$

Observamos que esta propiedad también se cumple en la suma que nos plantea el enunciado:

$$1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$$

Así pues, podemos calcular esta suma sumando los extremos, 1 + 100, y multiplicando el resultado por la mitad del número de términos, 50.

Ejecución

$$50 \times (1 + 100) = 50 \times 101 = 5050$$

Respuesta

La suma de los 100 primeros números naturales es 5050.

K

Particularización del problema

En casos complejos puede resultar de gran utilidad resolver primero el problema para situaciones particulares más sencillas.

Un comerciante mezcla m kg de café de Colombia de \$ 7,2 /kg y n kg de café de Jamaica de 9 \$/kg. Averigua cuántos kg de cada clase ha de tomar el comerciante para obtener p kg de mezcla de 8,4 \$/kg.

Solución

Comprensión del enunciado

Se trata de averiguar cuántos kg debe tomar de cada clase de café para que el precio de la mezcla obtenida sea de 8,4 \$/kg.

Planificación

Resolvemos primero el problema en el caso particular de que $p = 6$ kg. Para ello organizamos los datos en forma de tabla:

Clase de café	Colombia	Jamaica	Mezcla
Cantidad (kg)	m	n	6
Precio (\$/kg)	7,2	9	8,4

De la relación existente entre la cantidad y el precio, y suponiendo que con la mezcla no va a haber ni ganancia ni pérdida, establecemos lo siguiente:

$$7{,}2 \cdot m + 9 \cdot n = 8{,}4 \cdot 6$$

Por otro lado, como la cantidad mezclada debe sumar 6 kg, tendremos:

$$m + n = 6$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones anteriores, hallamos la solución del problema particular.

Para resolver el problema inicial, basta con sustituir 6 por p.

Ejecución

Debemos resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 7{,}2 \cdot m + 9 \cdot n = 8{,}4 \cdot p \\ m + n = p \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema se obtiene: $m = \frac{p}{3}$; $n = \frac{2p}{3}$

Respuesta

Por tanto, la mezcla debe estar compuesta de un tercio de café de Colombia y de dos tercios de café de Jamaica.

Problemas resueltos

L

Experimentación con la posible solución

Este método, muy útil en geometría, consiste en suponer una posible solución del problema que se nos plantea y verificar que esta satisface las condiciones del enunciado.

Si es así, ya hemos resuelto el problema. Si no es así, es posible que hayamos encontrado una pista que nos conduzca a la solución correcta.

De todos los rectángulos de igual área, determina cuál es el de menor perímetro.

Solución

Comprensión del enunciado

Se trata de hallar las dimensiones del rectángulo de menor perímetro de entre todos los que tienen igual área.

Planificación

Sabemos que el cuadrado es, de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de área máxima. Parece entonces razonable pensar que sea también el de menor perímetro de todos los de igual área.

Si conseguimos demostrarlo, habremos resuelto el problema.

Ejecución

Sean *a* y *b* los lados de un rectángulo de área s. Tenemos que: $s = a \times b$

Así pues, el lado de un cuadrado de área S será:

$$l = \sqrt{s} = \sqrt{a \cdot b}$$

Calculamos ahora los perímetros Pr y Pc del rectángulo y del cuadrado de área S:

$$P_r = 2(a + b) = 2a + 2b$$

$$P_c = 4 \cdot l = 4\sqrt{a \cdot b}$$

Se cumple que ya que:

$$2a + 2b - 4\sqrt{a \cdot b} = (\sqrt{2a} - \sqrt{2b})^2 \geq 0$$

Así pues, para cualquier rectángulo que consideremos con igual área a la de un cuadrado de área S.

Luego el cuadrado es, de todos los rectángulos de área S, el de menor perímetro.

Respuesta

De todos los rectángulos de igual área, el cuadrado es el de perímetro mínimo.

M

Búsqueda de un problema similar resuelto

Esta estrategia consiste en la búsqueda de semejanzas entre el problema que se pretende resolver, o una parte de él, y otro resuelto con anterioridad.

Lógicamente, cuantos más problemas hayas resuelto anteriormente, más útil te será esta estrategia, puesto que aumenta la probabilidad de encontrar un problema similar.

En un desfile, un grupo de bastoneras se dispone en forma de triángulo del siguiente modo: una bastonera en la primera fila, dos en la segunda, tres en la tercera y así sucesivamente hasta un total de 15 filas.

Calcula el número de cachiporreras que componen el desfile.

Solución

Comprensión del enunciado

Debemos calcular la suma de las bastoneras que componen cada una de las filas, es decir:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 14 + 15 = ¿?$$

Planificación

La resolución del problema se reduce a calcular la suma de los 15 primeros números naturales.

Este enunciado nos recuerda un problema que resolvimos con anterioridad al estudiar la estrategia de simplificación y búsqueda de regularidades.

En aquel caso teníamos que calcular la suma de los 10 primeros números naturales. Para ello sumamos los extremos y multiplicamos por la mitad del número de términos.

Podemos aplicar el mismo método para resolver el problema planteado en esta ocasión:

$$1 + 2 + 3 + ... + 13 + 14 + 15$$

$$1 + 15 = 2 + 14 = 3 + 13 = ...$$

Ejecución

$$\frac{(1 + 15) \cdot 15}{2} = 120$$

Respuesta

El desfile está compuesto por 120 bastoneras.

Problemas resueltos

N

Modificación del enunciado

En ocasiones puede modificarse el enunciado de un problema de manera que obtengamos otro equivalente cuya resolución resulte más fácil.

Solución

Calcula el volumen del cuerpo de la figura.

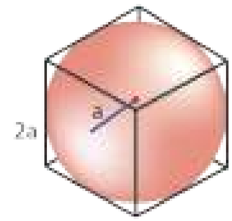
Comprensión del enunciado

Debemos hallar el volumen del cuerpo representado en la figura.

Planificación

No existe una fórmula que nos dé directamente el volumen, pues no se trata de ningún poliedro ni de un cuerpo de revolución.

Sin embargo, podemos inscribir esta figura en un cubo de lado 2a y dividir este cubo en 8 cubos más pequeños mediante planos perpendiculares que pasen por su centro. Si redistribuimos el espacio no ocupado por la figura, vemos que el volumen que esta ocupa es el del cubo menos el de la esfera de radio a.



Ejecución

$$V_{cubo} - V_{esfera} = (2a)^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = 8a^3 - \frac{4}{3}\pi a^3$$

Respuesta 3, g l a^3

O

Búsqueda de un contraejemplo

Esta estrategia se utiliza para demostrar la falsedad de un enunciado matemático. Puesto que un enunciado expresado de manera general ha de cumplirse siempre, si en un caso particular (contraejemplo) no se cumple, el enunciado ya no es válido.

Averigua si el siguiente enunciado es falso: $2^n + 3$ es un número primo para cualquier número natural n que consideremos.

Solución

Comprensión del enunciado

Se trata de ver si la expresión $2^n + 3$ es un número primo para cualquier número natural n.

Planificación

Calculamos, para varios valores de n, el valor de $2^n + 3$. Si para algún valor de *n* el resultado no es un número primo, podemos afirmar que el enunciado es falso.

Ejecución

n - 1 $\Rightarrow 2^n + 3 = 5$, que es un número primo.

n - 2 $\Rightarrow 2^n + 3 = 7$, que es un número primo.

n - 3 $\Rightarrow 2^n + 3 = 11$, que es un número primo.

n - 4 $\Rightarrow 2^n + 3 = 19$, que es un número primo.

n - 5 $\Rightarrow 2^n + 3 = 35$, que **no** es un número primo.

Respuesta

No es cierto que $2^n + 3$ sea un número primo para cualquier número natural n.

P

Reducción al absurdo

Esta estrategia se utiliza para demostrar afirmaciones. Consiste en suponer la falsedad de lo que se quiere demostrar y llegar así a una contradicción.

Demuestra que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Solución

Comprensión del enunciado

Se trata de demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional, es decir, que no existe ninguna fracción que lo represente.

Planificación

Suponemos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Si esta suposición nos conduce a una contradicción, quedará demostrado que $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.

Ejecución

Si $\sqrt{2}$ es un número racional, existirá una fracción irreducible que lo represente:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b};\ \text{M.C.D.}\ (a,b) = 1$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Esto es absurdo, pues si a y b no tienen factores comunes, al ser M.C.D. (a, b) = 1, tampoco los tendrán a^2 y b^2. Por tanto, su cociente no puede ser igual a 2.

Respuesta $\sqrt{2}$ no es un número racional

Ejercicios y problemas propuestos

1 Conceptos estadísticos

1. El tiempo invertido por los participantes en una prueba de atletismo en cubrir el circuito es una variable estadística:

   a. Cualitativa.

   b. Cuantitativa discreta.

   c. Cuantitativa continúa.

2. Al realizar un estudio estadístico es conveniente escoger una muestra:

   a. Siempre.

   b. Si la población es muy grande.

   c. Solo si los individuos son seres humanos.

3. Un profesor efectúa un examen para conocer el nivel de sus alumnos al empezar el curso.

   a. **Explica** por qué este proceso es un estudio estadístico.

   b. **Indica** la población y la variable estadística.

   c. Razona de que tipo es la variable estadística.

4. **Define** la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de un valor de una variable estadística en una serie de datos y, a continuación, r**esponde**:

   a. ¿Cuánto suman las frecuencias absolutas de todos los posibles valores de una variable estadística? ¿Y las relativas? **Justifica** tus respuestas.

5. **Indica** tres variables estadísticas discretas y tres continuas que se puedan considerar en el conjunto de alumnos de tu clase.

6. Se quiere efectuar un estudio estadístico para averiguar el tipo de comercio preferido por las familias ecuatorianas para hacer sus compras.

   a. ¿Es necesario tomar una muestra?

   b. En caso afirmativo, propón diferentes formas de escogerla, valorando, en cada caso, sus ventajas y sus inconvenientes.

7. **Considera** que vas a efectuar un estudio sobre la asignatura preferida por los estudiantes de tu centro escolar a partir de una muestra aleatoria de 40 personas. **Expón** el método que emplearías en la selección, detallando sus ventajas y sus inconvenientes y, por tanto, los posibles problemas de falta de representatividad de la muestra.

2 Tablas de frecuencias

8. Se ha preguntado a los 24 alumnos de una clase el número de veces que han ido al cine durante el último mes. Las respuestas han sido: 2, 0, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 0, 2, 4, 0, 5, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 0, 2. **Elabora** la tabla de frecuencias correspondiente.

9. Las precipitaciones medias anuales, expresadas en milímetros, en los últimos 50 años medidas en una estación meteorológica son las siguientes:

   320, 355, 475, 360, 450, 625, 420, 250, 390, 300, 460, 450, 255, 330, 330, 375, 390, 520, 570, 250, 455, 725, 570, 405, 635, 575, 350, 560, 460, 535, 410, 475, 390, 350, 395, 410, 610, 445, 725, 390, 610, 385, 345, 450, 635, 420, 550, 460, 485, 620.

   Agrupa estos datos en diez intervalos y **construye** la tabla de frecuencias correspondiente

10. **Confecciona** la tabla de distribución de frecuencias referente al número de hermanos de los 25 alumnos de una clase si dispones de la siguiente información:

    a. La frecuencia absoluta acumulada del dato 0 hermanos es 2.

    b. La frecuencia relativa acumulada del dato 1 hermano es 0,4.

    c. Hay alumnos que tienen dos hermanos.

    d. La frecuencia relativa del dato tres hermanos es 0,16.

    e. La frecuencia absoluta del dato 4 hermanos es 1.

11. Al lanzar un dado cuarenta y dos veces, obtenemos los siguientes resultados.

    3, 2, 1, 6, 3, 5, 4, 2, 4, 2, 6, 4, 1, 6, 4, 5, 1, 1, 2, 6, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 5, 3, 1, 5, 6, 5, 6, 2, 4, 1, 6, 5, 1, 2, 6

    Elabora una tabla de distribución de frecuencias con las frecuencias relativas y las relativas acumuladas expresadas en porcentaje.

12. Las masas en gramos de 33 piezas producidas por una máquina son:

    6,8; 6,5; 6,9; 7,0; 6,8; 6,7; 6,9; 6,4; 7,0; 7,1; 6,7; 6,6; 6,4; 6,7; 7,2; 6,8; 6,9; 6,9; 6,5; 7,0; 6,9; 6,7; 6,5; 6,8; 7,0; 6,8; 6,4; 6,9; 7,1; 7,0; 6,6; 6,6; 6,8

    Agrupa estos datos en seis intervalos que vayan de 6,35 g a 7,25 g, y **confecciona** una tabla de distribución de frecuencias.

Ejercicios y problemas propuestos

13. La siguiente serie de datos corresponde al número de títulos publicados en España sobre matemáticas entre 1998 y 2006: 1 066, 924, 1 147, 945, 962, 895, 822, 717, 691. **Construye** la tabla de distribución de frecuencias y el diagrama de barras correspondiente.

14. A los 100 empleados de una empresa de piezas de precisión, se les ha realizado una prueba de habilidad manual. En una escala de 0 a 100 se han obtenido las siguientes puntuaciones:

    27, 66, 32, 55, 46, 37, 75, 81, 18, 33, 47, 74, 37, 52, 47, 66, 80, 87, 37, 29,46, 15, 29, 90, 76, 67, 23, 35, 94, 23, 25, 56, 73, 78, 17, 28, 76, 58, 45, 36,55, 60, 17, 56, 23, 82, 64, 50, 51, 45, 37, 65, 62, 26, 69, 36, 54, 42, 40, 54,27, 62, 28, 65, 46, 92, 36, 33, 23, 66, 18, 82, 47, 49, 59, 45, 73, 43, 47, 83,78, 65, 39, 36, 53, 91, 38, 35, 68, 78, 91, 23, 34, 43, 55, 56, 74, 56, 62, 38.

    Agrupa estos datos en intervalos de amplitud 10, y **confecciona** una tabla de distribución de frecuencias.

3 Gráficos estadísticos

15. Los gráficos más usuales para representar variables cuantitativas continuas son:

    a. Pictogramas

    b. Diagramas de barras

    c. Histogramas

16. Se han lanzado 10 monedas 200 veces obteniéndose, en cada lanzamiento, el número de caras que indica la siguiente tabla:

Número de caras	0	1	2	3	4	5
Número de veces	0	2	7	23	43	44
Número de caras	6	7	8	9	10	
Número de veces	47	24	8	2	0	

—**Construye** un diagrama de barras que refleje estos datos.

17. Los datos correspondientes a un ejercicio de flexión de brazos realizado por 250 alumnos de 1° de Bachillerato figuran en la siguiente tabla:

Número de flexiones	Número de alumnos
[0, 5)	41
[5, 10)	43
[10, 15)	61
[15, 20)	56
[20, 25)	32
[25, 30)	11
[30, 35)	4
[35, 40)	1
[40, 45)	1

—**Representa** gráficamente estos datos mediante un histograma y **traza** el correspondiente polígono de frecuencias.

18. Las masas en gramos de 33 piezas producidas por una máquina son:

    6,8; 6,5; 6,9; 7,0; 6,8; 6,7; 6,9; 6,4; 7,0; 7,1; 6,7; 6,6; 6,4; 6,7; 7,2; 6,8; 6,9; 6,9; 6,5; 7,0; 6,9; 6,7; 6,5; 6,8; 7,0; 6,8; 6,4; 6,9; 7,1; 7,0; 6,6; 6,6; 6,8.

    A partir de estos datos, **representa** mediante un histograma:

    a. Las frecuencias absolutas y **traza** el polígono de frecuencias.

    b. Las frecuencias absolutas acumuladas y **traza** la ojiva correspondiente.

19. El número de socios de una ONG, por edades, es el siguiente: 16 634 menores de 30 años; 41 395 de entre 30 y 40 años; 58 011 de 40 a 50 años; 39 409 de 50 a 60 años; 14 936 de 60 a 70 años, y 10 222 mayores de 70 años. **Confecciona** el diagrama de barras y el diagrama de sectores.

20. Las horas de estudio que 50 universitarios dedicaron a la preparación de un examen fueron:

    25, 16, 42, 8, 36, 25, 19, 14, 12, 18, 21, 36, 46, 24, 18, 26, 31, 42, 26, 16, 5, 29, 14, 20, 26, 19, 32, 45, 28, 17, 34, 28, 9, 15, 24, 40, 36, 32, 23, 25, 35, 35, 26, 18, 7, 22, 17, 12, 16, 32.

    Agrupa los datos en siete intervalos comenzando en el valor 2 y acabando en el valor 51.

    a. **Construye** la tabla de distribución de frecuencias correspondiente. Expresa las frecuencias relativas en porcentaje.

    b. **Representa** las frecuencias relativas acumuladas mediante un histograma.

Ejercicios y problemas propuestos

21. Según el diario El Mundo las aportaciones de la ECHO (European Community Humanitarian Office) a las principales agencias humanitarias de la ONU son las siguientes:

Agencia	Millones de euros
ACNUR (Alto Comisionado de la ONU para los Refugiados)	520
PAM (Programa de Alimentación Mundial)	205
UNICEF (Fondo Internacional de la ONU de Auxilio a la Infancia)	40
OMS (Organización Mundial de Salud)	14
PNUD (Programa de la ONU para el Desarrollo)	1
UNDHA (Departamento de Asuntos Humanitarios de la ONU)	1

—**Construye** un diagrama de barras y un diagrama de sectores que reflejen estos datos.

22. Los goles logradas en un campeonato por 25 delanteros fueron:

8, 10, 12, 12, 10, 10, 11, 11, 10, 13, 9, 11, 10, 9, 9, 11, 12, 9, 10, 9, 10, 9, 10, 8, 10.

Resume los datos anteriores en una tabla de frecuencias absolutas y relativas, y **dibuja** el correspondiente diagrama de barras.

23. En 1797 el científico inglés Henry Cavendish midió la densidad de la Tierra a través de una balanza de torsión. Realizó 29 observaciones y obtuvo los siguientes valores (en g/cm^3).

5,50 5,61 4,88 5,07 5,26 5,55 5,36
5,29 5,58 5,65 5,57 5,53 5,63
5,29 5,44 5,34 5,79 5,10 5,27 5,39 5,42
5,47 5,63 5,34 5,46 5,30 5,75
5,68 5,85

Agrupa los datos en cinco clases de amplitud 0,25, considerando como límite inferior de la primera clase el valor 4,75 y **construye** la correspondiente tabla completa de frecuencias.

24. Forma grupos para resolver los problemas siguientes:

a. Cada grupo deberá elegir un tema a propuesta del profesor/a. Diseñen una encuesta y realicen sobre la población de la localidad y asegúrense de escoger una muestra representativa.

b. A continuación, **elabora** las tablas de distribución de frecuencias para cada una de las preguntas y **representa** los resultados utilizando los gráficos más convenientes.

c. Expón en clase los resultados y **extrae** conclusiones.

25. **Conéctate** a la página www.inec.gob.ec/estadísticas /, y **busca** información sobre el Índice de Precios de Consumo (IPC).

Construye un gráfico evolutivo de la variación interanual del IPC en Ecuador durante el período 2000-2010.

26. Al preguntar a cada uno de los alumnos y alumnas de una clase por su número de hermanos, se obtuvieron los siguientes datos:

1, 0, 2, 1, 3, 2, 1, 5, 0, 0, 4, 1, 2, 2, 3, 0, 1, 2, 1, 1, 3, 2, 0, 0, 1, 1, 1, 4, 2, 2.

a. **Elabora** una tabla de distribución de frecuencias.

b. **Representa** las frecuencias absolutas mediante un diagrama de barras.

27. **Elabora** un gráfico evolutivo que indique las salas de cine abiertas en una comunidad a partir de estos datos.

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Salas de cine	3580	378	417	469	508

28. Cinco fabricantes A, B, C, D y E elaboran la totalidad de cierto producto de consumo. Si A triplica las ventas de B, B las de C, C las de D y D las de E, ¿cuál es la frecuencia relativa de las ventas de cada uno?

—**Representa** estas frecuencias relativas mediante un diagrama de sectores.

29. A partir de la siguiente serie de datos: A, C, A, A, B, D, A, C, D, B, A, E, A, B, C, E, B, D, B, C.

a. **Dispón** los datos en una tabla de distribución de frecuencias.

b. **Dibuja** el diagrama de sectores correspondiente.

c. ¿Qué porcentaje de resultados corresponde al dato A?

Ejercicios y problemas propuestos

4 Medidas de centralización

30. Dada la distribución siguiente:

    3, 4, 5, 5, 4, 3, 7, 5, 6, 5, 5, 7, 2, 3 y 5.

    Los valores de la moda, la media aritmética y la mediana son, respectivamente:

    a. 5; 4,6; 5,5

    b. 5; 4,2; 5

    c. 5; 4,6; 5

31. Supongamos que un grupo de alumnos presenta las siguientes estaturas (en cm):

    160, 161, 161, 163, 172, 190, 191, 192, 198

    a. **Halla** la moda y la mediana.

    b. ¿Crees que la moda o la mediana, en este caso, describen acertadamente al grupo de alumnos?

32. Para conocer el consumo en kw/h en una zona residencial de Guayaquil, en horas pico, se toma una muestra aleatoria de 15 viviendas de la zona y estos son los resultados:

    130, 145, 135, 155, 180, 200, 210, 190, 185, 206, 192, 140, 156, 167 y 180.

    a. **Calcula** el consumo promedio en Kwh de dicha zona en horas pico.

    b. **Determina** la moda y la mediana.

33. En un estudio estadístico sobre la cantidad de veces que practican deporte un grupo de 1° de bachillerato del colegio «X» las respuestas obtenidas fueron:

    5, 0, 1, 1, 2, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1 y 1.

    a. **Halla** los parámetros de centralización estudiados para el conjunto de datos.

    b. ¿Qué conclusiones puedes deducir de los resultados obtenidos?

34. **Demuestra** que si es la media aritmética de una distribución, la media de la distribución obtenida al multiplicar todos los valores de la primera por una constante c queda también multiplicada por c.

35. La producción mundial de crudo entre 1990 y 1999 en miles de barriles diarios se muestra en la tabla siguiente:

Año	Producción
1990	60 446,6
1991	59 920,5
1992	60 039,1
1993	59 827,1
1994	60 480,0
1995	61 494,0
1996	63 486,1
1997	65 467,9
1998	66 149,0
1999	64 564,1

Fuente: PEMEX (Petróleos de México).

    a. **Construye** un gráfico evolutivo que refleje estos datos.

    b. **Calcula** la producción media en estos años.

36. Los pesos de los 65 empleados de una fábrica vienen dados por la siguiente tabla:

Peso	fi
[50, 60)	8
[60, 70)	10
[70, 80)	16
[80, 90)	14
[90, 100)	10
[100, 110)	5
[110, 120)	2

    a. **Halla** el peso promedio de los empleados.

    b. **Construye** el gráfico representativo para estos datos

37. **Calcula** los parámetros de centralización y de dispersión para los datos de esta tabla:

Intervalo	[0, 3)	[3, 6)	[6, 9)	[9, 12)	[12, 15)
n_1	1	4	25	5	15

38. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana en la distribución de datos que aparece en esta tabla.

Intervalo de clase	[2, 8)	[8, 14)	[14, 20)	[20, 26)
n_1	1	4	25	5

39. Una máquina produce piezas que, teóricamente, han de medir 50 mm. Seleccionada una muestra de 39 piezas, se obtuvieron las siguientes medidas, expresadas en milímetros.

49, 49, 50, 52, 50, 50, 49, 50, 52, 51, 50, 47, 50, 51, 49, 50, 50, 51, 49, 52, 50, 51, 50, 51, 50 ,50, 51, 50, 48, 50, 53, 50, 52, 49, 50, 53, 49, 48 y 55.

—**Calcula** la moda, la media y la mediana de esta muestra.

40. La siguiente tabla muestra el consumo de gasol na de cierto vehículo (en litros cada 100 km), calculado en doscientas ocasiones.

Intervalo	[6, 7)	[7, 8)	[8, 9)	[9, 10)	[10, 11)
n_1	11	39	67	56	27

—**Determina** manualmente la moda, la mediana y la media aritmética de la distribución de datos.

41. La siguiente tabla muestra la duración (en horas) de treinta focos de cierta marca.

Duración	N.° de focos
[310, 420)	1
[420, 530)	10
[530, 640)	10
[640, 750)	5
[750, 860)	3
[860, 970)	1

—**Determina** la duración media de los focos

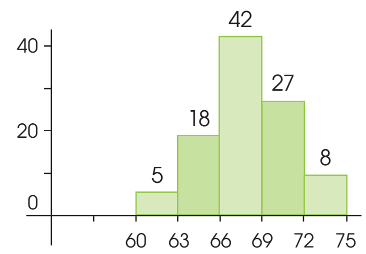
42. **Elabora** el histograma de frecuencias absolutas correspondiente a los datos de la siguiente tabla y **halla** la moda, la mediana y la media aritmética.

Intervalo	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)
n_1	22	2	8	9	5

43. Se desea llevar a cabo un estudio estadístico de la edad de los visitantes de un museo. Para ello, se considera una muestra representativa y se obtienen estos resultados: 13, 15, 18, 22, 21, 35, 38, 45, 20, 21, 19, 24, 28, 67, 26, 24, 31, 23, 25, 27, 25, 16, 17, 19, 20 y 21.

—**Calcula**, usando la calculadora, la media aritmética y la desviación típica de los datos anteriores y **comprueba** si tu respuesta es correcta.

44. El histograma de la distribución correspondiente al peso de 100 alumnos de bachillerato es el siguiente:



a. **Elabora** la tabla de la distribución.

b. **Calcula** la media, la moda y la mediana

5 Medidas de dispersión y de posición

45. El precio, en dólares, de un mismo artículo en diferentes tiendas viene dado por esta serie de datos.

2,50; 2,50; 2,50; 2,50; 2,55; 2,55; 2,55; 2,60; 2,60; 2,60; 2,60; 2,65; 2,65; 2,70; 2,70; 2,70; 2,75; 2,75; 2,80; 2,80; 2,85 y 2,90.

—**Calcula** la media aritmética y la desviación típica de estos datos usando tu calculadora.

46. Los 40 alumnos de una clase han obtenido las siguientes calificaciones, sobre 50, en un examen de Física.

3, 15, 24, 28, 33, 35, 38, 42, 23, 38, 36, 34, 29, 25, 17, 7, 34, 36, 39, 44, 31, 26, 20, 11, 13, 22, 27, 47, 39, 37, 34, 32, 35, 28, 38, 41, 48, 15, 32 y 13.

—Construir la tabla de frecuencias.

—**Calcula**:

a. La moda, mediana y media.

b. El rango, varianza y desviación típica.

47. Las alturas de los jugadores de un equipo de baloncesto vienen dadas por la tabla:

—**Calcula**:

a. La media, mediana y moda

b. La desviación media

Altura	N.° de jugadores
[170,175)	1
[175,180)	3
[180,185)	4
[185,190)	8
[190,195)	5
[195,200)	2

Ejercicios y problemas propuestos

48. Sea una distribución estadística que viene dada por la siguiente tabla:

Edad	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
fi	4	11	24	34	40

—**Calcula**:

a. La media aritmética y desviación típica.

b. ¿Entre qué valores se encuentran las 10 edades centrales?

c. **Representa** el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

49. En una clase se han recogido datos de los hábitos de lectura de los alumnos en el último año.

Libros leídos	[0, 1]	[2, 4)	[5, 7]	[8, 10]
Alumnos	6	9	5	2

a. **Representa** la información en un gráfico.

b. **Calcula** la media, la moda y la mediana.

c. **Calcula** la desviación media, la varianza y la desviación típica.

50. Dada la siguiente distribución de frecuencias, **calcula**:

a. Media y desviación típica.

b. Percentiles 20 y 80.

x	10-12	7-9	4-6	1-3
n	10	100	60	30

51. **Utiliza** alguna calculadora de estadística descriptiva para calcular la moda, la media aritmética, la varianza y la desviación típica de la siguiente serie de datos, que corresponden a la edad en que se casaron un total de 20 personas encuestadas:

26, 28, 26, 29, 32, 35, 37, 26, 29, 32, 34, 34, 32, 34, 37, 40, 32, 25, 36, 32 y 38.

52. Una distribución estadística viene dada por la siguiente tabla:

Intervalos	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)
fi	3	5	7	4	2

—**Halla** la media y percentil 70.

53. La realización de una prueba de habilidad motora por parte de 60 niños han dado los resultados que siguen:

15, 35, 18, 23, 75, 81, 19, 27, 15, 18, 63, 45, 31, 32, 45, 18, 29, 17, 30, 77, 76, 75, 19, 15, 23, 35, 81, 15, 81, 41, 76, 24, 27, 69, 15, 18, 13, 18, 76, 14,29, 31, 52, 46, 18, 17, 35, 62, 44, 31, 18, 27, 32, 74, 19, 31, 47, 19, 82 y 50.

Agrupa estos datos en intervalos de amplitud cinco, y **realiza** la correspondiente tabla estadística completa.

54. Se ha realizado un test de habilidad numérica a los alumnos de una clase. Los resultados obtenidos son:

Puntos	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)
Alumnos	4	6	6	10	8

a. **Representa** los datos mediante un histograma.

b. **Calcula** el promedio de la puntuación obtenida por el grupo en el test.

c. **Halla** la moda, mediana, desviación típica y desviación media. **Interpreta** los resultados.

55. Los siguientes datos corresponden al número de viajeros, por meses, en establecimientos hoteleros durante el año 2014 en Ecuador.

2 775 738, 3 205 892, 4 143 343, 4 931 385, 5 724 555, 5 834 331, 6 415 298, 6 986 211, 6 349 504, 5 447 890, 3 570 715, 3 204 082

—**Calcula** el promedio anual de viajeros y luego **calcula** la desviación típica para ver si esa media es representativa de todos los meses del año.

56. Se ha hecho una encuesta sobre el número de hijos en 50 familias, con los siguientes resultados:

0, 2, 1, 2, 5, 2, 1, 1, 1, 4, 0, 0, 2, 0, 4, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 0,3, 3, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 5, 1, 1, 3, 3, 2, 1, 0, 1, 1, 3, 3, 3, 2, 2 y 4

a. **Construye** la tabla de frecuencias absolutas acumuladas y relativas acumuladas.

b. **Calcula** el número promedio de hijos por familia, la moda y la mediana.

c. **Calcula** las desviaciones de los datos a su media y el percentil 40

Ejercicios y problemas propuestos

57. En la fabricación de un determinado tipo de focos, se han detectado algunos defectuosos. Se han estudiado 200 cajas de 75 bombillas cada una y se han obtenido los siguientes resultados:

Defectuosas	1	2	3	4	5	6	7	8	
N.º de cajas	5	15	38	42	49	32	17	2	200

a. **Completa** la tabla de frecuencias.

b. **Calcula** la mediana, la media aritmética, la varianza y la desviación típica de la distribución.

58. **Construye** la tabla de distribución de frecuencias de la siguiente serie de datos correspondientes a la temperatura mínima registrada en una ciudad a lo largo del mes de febrero:

8,4 - 8 - 7 - 2,6 - 4,6 - 2,4 - 1,2 - 1 - 2 - 2,2 - 3 - 3,6-4,4 - 4,6 - 3 - 2,4 - 1,4 - 2,4 - 1,2 - 2,2 - 2 - 7,8-6,6 - 5,2 - 1,6 - 4 - 3,8 – 5

59. **Construye** la tabla de distribución de frecuencias de la siguiente serie de datos correspondientes al tiempo, en minutos, que tardan los alumnos de un curso en ir a su escuela:

10, 0, 2, 21, 24, 3, 7, 8, 5, 9, 8, 6, 5, 6, 12, 14, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 16 y 6.

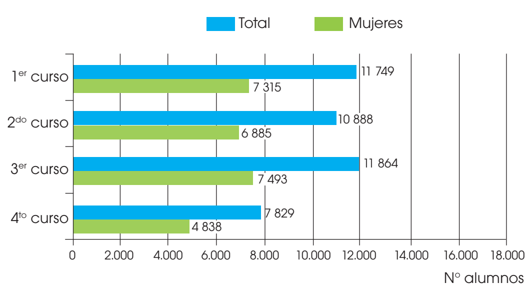
60. Lanzamos un dado 25 veces y obtenemos los siguientes resultados:

5, 3, 2, 6, 5, 1, 2, 3, 2, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 4, 2, 2, 4 y 3.

—**Calcula** el promedio de los datos, la mediana y el percentil P_{30}.

6 Interpretación de información estadística

61. Los datos que aparecen en el siguiente gráfico corresponden a los alumnos matriculados en la universidad en un determinado curso escolar.



a. ¿En qué curso hay mayor porcentaje de chicos?

b. ¿Hay algún curso en que el porcentaje de mujeres doble el de hombres?

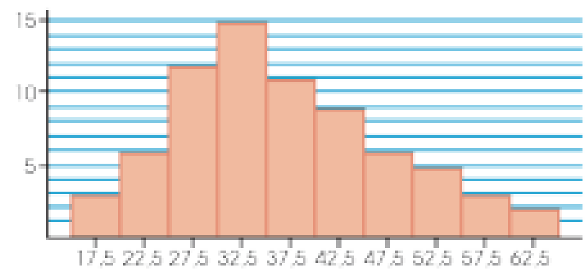
c. ¿Cuál es el porcentaje de chicas del total de las facultades?

62. El siguiente histograma muestra la edad de los trabajadores de una empresa.

a. ¿Cuántos trabajadores hay en esa empresa?

b. ¿Qué porcentaje de trabajadores tienen entre 20 y 30 años?

c. ¿Qué porcentaje de ellos tienen menos de 25 años?

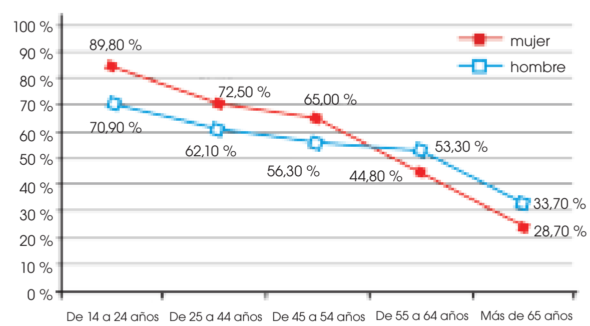


63. Este gráfico muestra los resultados de un estudio sobre hábitos de lectura:

a. ¿Qué grupo de población lee más?

b. ¿En qué segmento de edad las diferencias por sexo son mayores?

c. **Analiza** la influencia de la edad y del sexo en los resultados de la gráfica.



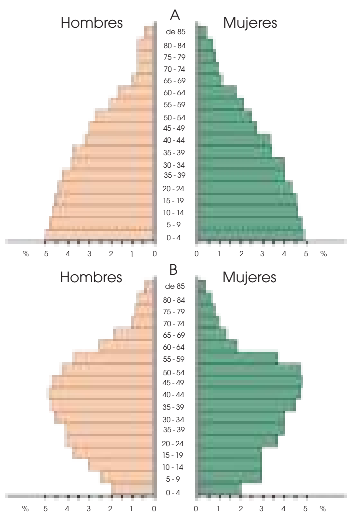
64. **Observa** estas dos pirámides de población correspondientes a dos países, A y B.

a. ¿Qué porcentaje de la población del país A está constituida por mujeres entre 35 y 39 años?

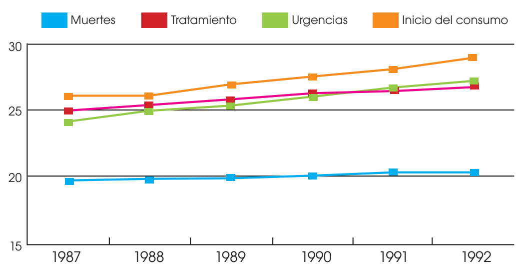
b. ¿Qué porcentaje de personas del país B tienen entre 70 y 74 años?

c. ¿Qué porcentaje de personas del país B son menores de 14 años?

d. ¿Cuál de los dos países crees que se encuentra en un proceso de desarrollo? **Justifica** tu respuesta.



65. El siguiente gráfico muestra la edad media de los consumidores de opiáceos o cocaína registrados por el SEIT (Servicio Estatal de Información sobre Toxicomanías).



a. Di si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

—Existe una tendencia al aumento progresivo de la edad media de los consumidores de opiáceos en los tres indicadores del SEIT (tratamientos, urgencias y mortalidad).

—Desde 1991, la edad media de los consumidores atendidos en urgencias es inferior a la de los admitidos a tratamiento.

—Se aprecia una lenta, pero muy consistente, tendencia al aumento de la edad media de los que se inician en el consumo de opiáceos o cocaína.

b. **Busca** información y **comenta** con tus compañeros los problemas de salud relacionados con el consumo de drogas.

66. Para estudiar la fiabilidad de dos tipos de test de control de alcoholemia, se efectúan varias pruebas de cada uno de ellos a una misma persona. Los resultados obtenidos son:

Test A: $\bar{x}$ = 0, 09 mg/dL y $\bar{x}$ = 0, 02 mg/dL

Test B: $\bar{x}$ = 0, 09 mg/dL y $\bar{x}$ = 0, 05 mg/dL

¿Qué test es más fiable? **Justifica** tu respuesta.

67. Un tipo de pieza determinado es fabricado por dos marcas comerciales. Para comparar ambos fabricantes tomamos una muestra de 10 piezas de cada marca y observamos su duración, en semanas.

Marca A: 23, 24, 24, 25, 22, 24, 25, 24, 23 y 25.

Marca B: 22, 24, 25, 23, 24, 24, 24, 26, 24 y 23.

Según los resultados obtenidos, ¿qué marca es preferible comprar? ¿Por qué?

68. En un lugar se mide la temperatura durante quince días y se obtienen estos valores (en °C): 13, 15, 12, 17, 18, 10, 18, 19, 22, 19, 16, 17, 18, 18 y 18.

a. **Construye** la tabla de frecuencias.

b. **Calcula** todos los parámetros estadísticos que has estudiado en esta unidad.

69. El número de fallos cometidos por los alumnos de una clase en un test fue:

N.° de fallos	0	1	2	3	4	5
N.° de alumnos	5	7	11	4	2	1

—¿Cuál fue el número medio de fallos cometidos por los alumnos?

70. **Halla** la moda, la media aritmética y la mediana de esta serie de datos.

9,75; 9,50; 9,50; 9,25; 9,50; 9,75

—**Determina** los diferentes parámetros de dispersión (recorrido, desviación media, varianza y desviación típica) de la serie.

71. Esta tabla recoge la masa en gramos de cien comprimidos de un determinado medicamento.

a. **Representa** el histograma de frecuencias absolutas.

b. **Calcula** todos los parámetros estadísticos que has estudiado en esta unidad.

Ejercicios y problemas propuestos

Masa (Gramos)	N.º de Comprimidos
[4,45, 4,55)	3
[4,55, 4,65)	23
[4,65, 4,75)	56
[4,75, 4,85)	11
[4,75, 4,85)	7
[4,85, 4,95)	2

72. En una escuela se desea conocer el nivel cultural de sus alumnos. Para ello, se realiza un test a cien estudiantes y se obtienen estos datos:

Puntos	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)
n_i	12	34	38	12	4

¿Qué conclusiones pueden extraerse a partir de estos datos? **Justifica** tu respuesta teniendo en cuenta los parámetros de centralización y de dispersión.

73. En un colegio de Quito hemos medido la altura de los 25 alumnos. Sus medidas, en cm, se reflejan en la siguiente tabla, agrupados en intervalos:

Alturas	N° de alumnos (fi)
[150,155)	3
[155,160)	7
[160,165)	6
[165,170)	4
[170,175)	5

—**Calcula** la varianza y la desviación típica.

74. En una fábrica de autos se han pesado 40 piezas y los resultados de las pesadas, expresados en gramos, son los siguientes:

64,1 66,4 64 66,7 65,3 64,4 63,9 63 65,4 64,3
68,8 66,6 65,1 64,2 68,5 65,7 65,8 63,1 64,6 63,5
65 66,4 67,3 65,7 64 61,5 64,1 65 63 63,2
66,9 66,367 66,1 66,8 65,3 64,4 64,5 63,1 y 65,5.

—**Confecciona** una tabla estadística para presentar los resultados agrupando en intervalos los valores observados y donde aparezcan también las frecuencias absolutas acumuladas y las frecuencias relativas acumuladas. **Toma** intervalos de amplitud de 1 cm. comenzando por 61.

75. La tabla muestra los datos sobre la temperatura media mensual y las precipitaciones caídas en un pueblo del Sistema Ibérico a lo largo de un año.

a. **Representa** los datos de la tabla en un diagrama de barras y un polígono de frecuencias.

b. **Calcula** la varianza y la desviación típica de los datos correspondientes a las temperaturas y las precipitaciones a lo largo del año.

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.
Temperaturas (°C)	2,5	7	10	10	15	20
Precipitaciones (mm)	12	25	30	60	62	45

Mes	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Temperaturas (°C)	22	25	23	15	10	5
Precipitaciones (mm)	24	8	17	80	30	25

76. **Determina** la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de cada una de estas distribuciones de datos, previa confección de las tablas adecuadas.

a.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	12	15	9	18	17	15	11	6	8

b.

x_i	18	19	20	21	22	23	24	25
n_i	3	12	54	66	57	55	18	11

77. A partir de una muestra representativa de cien familias ecuatorianas, se han obtenido los datos que aparecen en la siguiente tabla.

N.º de televisores	0	1	2	3	4	5
N.º de familias	5	20	35	26	12	2

—¿Qué puede decirse sobre el número de televisores en los hogares ecuatorianos?

78. En el archivo de una empresa se han perdido los datos de las ventas de la década de los años 90.

Década	50	60	70	80	90	00
Millones de dólares	1,25	1,82	1,95	2,86	x	3,58

—**Averigua** el valor de los datos desaparecidos (x), si se sabe que la media de las ventas de los años cincuenta al 2000 es de 2,43 millones de dólares.

Ejercicios y problemas propuestos

79. A partir de los siguientes resultados de dos clases de primero de bachillerato en un examen de estadística, **determina** la clase con mejor rendimiento y la más uniforme.

1.° A	Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	N.° de alumnos	2	1	4	5	7	6	2	1	1	1

1.° B	Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	N.° de alumnos	4	3	3	1	4	5	3	2	2	3

80. En un examen de matemáticas, los 30 alumnos de una clase han obtenido las puntuaciones recogidas en la siguiente tabla:

—**Halla** la varianza y la desviación típica.

Calif.	N.º de alumnos
(0,1)	2
(1,2)	2
(2,3)	3
(3,4)	6
(4,5)	7
(5,6)	6
(6,7)	1
(7,8)	1
(8,9)	1
(9,10)	1

81. En una clase se han recogido datos de los hábitos de lectura de los alumnos en el último año:

Libros leídos	[0, 1)	[2, 4)	[5, 7)	[8, 10)
Alumnos	6	9	5	2

a. **Representa** la información en un gráfico.

b. **Calcula** la media, la moda y la mediana.

c. **Calcula** la desviación media, la varianza y la desviación típica.

82. **Calcula** la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes: 3, 5, 5, 6, 7 y 8.

a. **Multiplica** por 2 cada uno de estos datos y **calcula** cada uno de los parámetros estadísticos que conoces de los datos así obtenidos.

b. **Multiplica** por 5 los datos iniciales y vuelve a calcular todos los parámetros estadísticos.

c. Compara los resultados y **extrae** conclusiones. ¿Qué ocurre con cada uno de los parámetros estadísticos cuando se multiplican por cierto número positivo todos los datos de una serie.

83. En 1797 el científico inglés Henry Cavendish midió la densidad de la Tierra a través de una balanza de torsión. Realizó 29 observaciones y obtuvo los siguientes valores (en g/cm^3).

5,50	5,61	4,88	5,07	5,26	5,55
5,36	5,29	5,58	5,65	5,57	5,53
5,63	5,29	5,44	5,34	5,79	5,10
5,27	5,39	5,42	5,47	5,63	5,34
5,46	5,30	5,75	5,68	5,85	

Agrupa los datos en cinco clases de amplitud 0,25, considerando como límite inferior de la primera clase el valor 4,75 y construye la correspondiente tabla completa de frecuencias.

84. Se midió el tiempo, en décimas de segundo, que tarda en grabarse un mismo archivo en 30 discos de un cierto fabricante, los datos obtenidos fueron:

38, 35, 76, 58, 48, 59, 67, 63, 33, 69, 53, 51, 28, 25, 36, 32, 61, 57, 49, 78, 48, 42, 72, 52, 47, 66, 58, 44, 44, y 56.

a. **Construye** la distribución de frecuencias.

b. **Determina** los cuartiles y el rango intercuartílico.

c. **Calcula** la media, la mediana, la moda, la desviación típica.

d. **Representa** gráficamente la distribución. **Comenta** el gráfico obtenido.

85. Un técnico en control de calidad seleccionó 30 cajas de cereal de un proceso de producción y encontró la siguiente distribución de pesos (gr).

—**Halla** la media, la mediana, la moda y **comenta** sobre la distribución y sus medidas.

Peso	N.° de cajas
497.5 < 499.0	2
499.0 < 500.5	14
500.5 < 502.0	9
502.0 < 503.5	4
503.5 < 505.0	1

86. En cierto barrio se ha constatado que las familias residentes se han distribuido, según su composición, de la siguiente forma:

Composición	0 - 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10
N.° de familias	110	200	90	75	25

a. ¿Cuál es el número medio de personas por familia?

b. ¿Qué porcentaje de familias está compuesta por más de 4 personas?

c. ¿Cuál es la varianza de composición de familias?

87. Dadas las siguientes notas de Estadística correspondientes a 30 alumnos:

5.3	6.5	6	5	7.5	8	7	6.5	6	4.5
4.5	3.5	4	7	6.5	5	7	4.5	5	5.5
7.5	6.5	1	6	9.5	4	6	7.5	7	7.5

a. **Calcula** la distribución de frecuencias.

b. **Determina** el porcentaje de suspendidos.

c. **Calcula** el porcentaje de alumnos con nota entre 5 y 7.5 ambos inclusive.

d. ¿Qué nota mínima hay que sacar para superar al 90% de los alumnos?

88. La siguiente tabla muestra la distribución de edades de un grupo de jóvenes que participan en unas competencias deportivas:

Edades	(10,12)	(12,14)	(14,16)	(16,18)	(18,20]
Frecuencia	4	11	24	34	40

—**Calcula** la media, mediana y moda.

89. Los datos siguientes corresponden a las faltas a clases en un mes de un grupo de estudiantes de bachillerato de un colegio «X»:

2, 4, 3, 1, 1, 4, 3, 5, 0, 7, 0, 2, 8, 3, 8, 0, 2, 2, 8, 1, 9, 0, 6, 3, 8, 3, 1, 4, 2, 8, 0, 2, 0, 4, 3, 1, 1, 5, 1, 9, 1, 8, 3 y 1.

a. ¿Cuál es el promedio de faltas de los estudiantes de bachillerato en el colegio?

b. ¿Cuál es el valor que corresponde a la mediana, y los cuartiles 1 y 3?

c. **Interpreta** los resultados.

90. **Determina** la moda, mediana y el primer y segundo cuartil de los para los datos:

2, 4, 3, 0, 2, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 0, 1, 4, 0, 1, 3, 4, 0, 1, y 2.

91. Los datos siguientes representan la temperatura del fluido de descarga de una planta para el tratamiento de aguas negras durante varios días consecutivos.

43	47	51	48	52	50	46
49	45	52	46	51	44	49
46	51	49	45	44	50	48
50	49	50				

Calcula:

a. La distribución de frecuencias de los datos.

b. La media y la mediana.

c. La varianza y la desviación típica.

d. El percentil 5 y 95 de la temperatura.

e. Porcentaje de días en que la temperatura es superior a 45, pero menor a 50.

f. **Representa** gráficamente la distribución y **comenta** el gráfico obtenido.

92. El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a Carmen o a Tania. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento, fueron estos:

1	8	2	3	2	2	2	4	1	9	2	5	1	6
1	8	2	6	1	8	2	8	2	2	1	7	1	8

a. ¿Cuál de las dos tiene mejor promedio?

b. **Calcula** la desviación típica.

c. ¿Cuál de las dos es más regular?

93. A una academia de baile en la ciudad de Manta asisten jóvenes de las siguientes edades:

14	16	16	19	17	17	15	17	17	15
19	15	15	16	17	14	15	16	17	16
16	15	16	18	14	15	14	17	13	18
16	16	15	16	17	15	17	14	16	16
18	18	16	18	17	17	17	17	15	16

a. **Construye** la tabla completa de frecuencias.

b. **Calcula** la moda.

c. **Determina** su media aritmética, varianza y desviación típica.

d. **Halla** el valor de la mediana, del percentil 29 y el cuartil 3.

94. En un grupo de 30 niños, se ha medido el peso, en kilogramos, de cada uno de ellos, obteniendo los siguientes resultados:

30	31	28	25	33	34	31
32	26	39	32	35	37	29
32	40	35	38	31	36	34
35	30	28	27	32	33	29
30	31					

a. **Haz** una tabla de frecuencias, agrupando los datos en intervalos de la forma que creas más conveniente.

b. **Representa** gráficamente la distribución.

95. Se realiza una encuesta a varias personas, sobre el tiempo promedio diario que dedican a la lectura. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos.

N.° de minutos	fi
$0 < x \leq 15$	15
$15 < x \leq 30$	40
$30 < x \leq 45$	20
$45 < x \leq 60$	25

—**Escribe** verdadero o falso según corresponda. **Argumenta** las que sean falsas.

a. __ La amplitud de clase utilizada fue 15.

b. __ La variable es cuantitativa discreta.

c. __El límite inferior de la tercera clase es 31.

d. __ 55 personas leen menos de 30 minutos.

e. __ El tiempo promedio de lectura de los encuestados es de media hora.

f. __ La clase modal y la clase mediana coinciden.

g. __ Tres de cada cuatro encuestados leen más de 45 minutos, como promedio.

96. En un almacén se hace un inventario y se pesan todos los paquetes que hay. La siguiente tabla recoge los resultados:

Paso	Paquetes
$0 \leq x < 10$	32
$10 \leq x < 20$	25
$20 \leq x < 30$	11
$30 \leq x < 4$	7
$40 \leq x < 50$	1

a. ¿Cuántas clases se utilizaron?

b. ¿Cuál fue la amplitud de clase utilizada?

c. ¿Cuántos paquetes pesan menos de 20 kg?

d. **Calcula** el peso promedio de los paquetes.

e. **Determina** la clase modal y clase medianal de los pesos.

97. Al realizar un control en una revisión médica del ritmo cardíaco de varias personas, se han obtenido los siguientes resultados en pulsaciones por minuto. Se considera normal un ritmo cardíaco de 60 a 100 pulsaciones por minuto.

Pulsaciones	fi
$46 \leq x \leq 59$	10
$60 \leq x \leq 73$	50
$74 \leq x \leq 87$	40
$88 \leq x \leq 101$	30
$102 \leq x \leq 115$	20

a. ¿Cuántas personas se controlaron?

b. ¿Qué amplitud de clase se utilizó en la confección de la tabla?

c. **Halla** la frecuencia relativa, en tanto por ciento, de la clase modal.

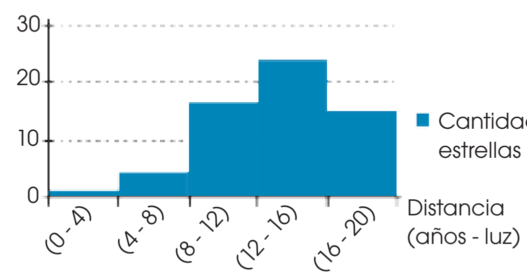
d. **Calcula** la media del ritmo cardíaco de las personas controladas.

e. Si ninguna persona tuvo 101 pulsaciones por minuto, ¿qué porcentaje de las personas controladas no tenía un ritmo cardíaco normal?

98. A partir de los siguientes datos, **representa** un diagrama de barras que muestre las frecuencias de las distintas notas musicales:

Nota	do	re	mi	fa	sol	la	si
Frecuencia (Hz)	262	394	330	349	392	440	494

99. **Interpreta** el siguiente histograma: debes especificar el significado de cada uno de los ejes de coordenadas.



100. La siguiente tabla muestra las distancias (en años-luz y para diferentes intervalos) de las estrellas más cercanas:

—**Representa** estos datos en un histograma y comprueba tus resultados con el *applet* que encontrarás en el siguiente enlace: http://links.edebe.com/w453vv

Númerosde estrellas	1	4	17	24	15
Distancia (Años-Luz)	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20

101. Un fabricante de automóviles desea estudiar el consumo de gasolina, en litros por cada 100 km, en un determinado modelo. Lleva a cabo una prueba con catorce vehículos en la que obtiene estos resultados:

7,8; 7,7; 7,8; 7,5; 7,7; 7,8; 7,7; 7,6; 7,8; 7,5; 7,5; 7,7; 7,8 y 7,8.

a. **Elabora** una tabla de distribución de frecuencias.

Ejercicios y problemas propuestos

b. **Determina** la moda, la media aritmética y la mediana de la distribución de datos.

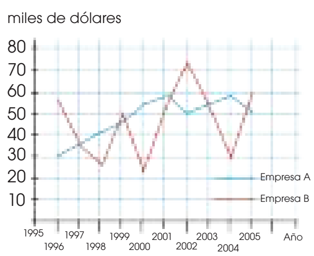
102. Las estaturas de los dieciséis jugadores de un equipo de fútbol son:

1,79; 1,74; 1,83; 1,96; 1,75; 1,68; 1,70; 1,76; 1,78; 1,82; 1,90;1,80; 1,65; 1,91; 1,86 y 1,89.

a. **Agrupa** estos datos en cuatro intervalos que vayan de 1,65 a 1,97, y **elabora** una tabla de distribución de frecuencias.

b. **Representa** las frecuencias absolutas en un histograma y **traza** el polígono de frecuencias.

103. La gráfica representa la evolución de los beneficios obtenidos durante varios años por dos empresas líderes dentro del mismo sector industrial.



a. ¿Qué beneficio medio anual corresponde a cada una de las empresas?

b. ¿Cuál es más rentable?

c. **Utiliza** la calculadora para hallar la media aritmética y la desviación típica del beneficio anual correspondiente a las dos empresas.

104. Esta tabla indica los metros cuadrados que tienen los cien departamentos que una agencia inmobiliaria ha puesto a la venta.

Intervalo de clase	[65, 70)	[70, 75)	[75, 80)	[80, 85)	[85, 90)
n_i	18	30	24	16	12

—**Determina** la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la distribución de datos, después de la confección de las tablas adecuadas.

105. Los resultados de un test de inteligencia realizado a 24 personas fueron:

100 ,80 ,92 ,101 ,65, 72, 121, 68, 75, 93, 101, 100,102, 97, 89, 73, 121, 114, 113, 113, 106, 84, 94, 83

a. **Obtén** la tabla de frecuencias y de porcentajes, tomando intervalos de amplitud 10.

b. **Representa** los datos en un histograma.

106. A partir de los datos, **construye** la tabla de frecuencias, y **calcula** e **interpreta** las medidas de centralización.

23, 10, 25, 12, 13, 24, 17, 22

16, 20, 26, 23, 22, 13, 21, 18

16, 19, 14, 17, 11, 17, 15, 26

107. Estos son los pesos de los últimos 20 pacientes de una consulta médica. **Organiza** los siguientes datos en una tabla de frecuencias y **calcula** sus medidas de centralización.

42, 51, 56, 66, 75, 47, 51, 45, 63, 79

69, 59, 50, 70, 5, 62, 54, 60, 63, 58

108. La tabla adjunta muestra la distribución de los salarios/mes en dólares percibidos por los 65 empleados de la empresa EXCELLENT.

Salario mes	N° empleados
500 - 600	8
600 - 700	10
700 - 800	16
800 - 900	14
900 -1000	10
1000 -1100	5
1100 -1200	2

Calcula:

a. Salario medio de la empresa

b. Salario, tal que la mitad de los empleados ganen menos.

c. Salario más frecuente:

d. **Presenta** los datos en un histograma.

109. Al preguntar a 20 estudiantes de un colegio, sobre el número de libros que han leído en el último trimestre, hemos obtenido las siguientes respuestas:

3, 2, 3, 1, 2, 4, 3, 3, 2, 3, 1, 3, 3, 3, 2, 2, 4, 5, 4 y 2.

a. **Elabora** una tabla de frecuencias.

b. **Representa** gráficamente la distribución.

c. **Calcula** las medidas de tendencia central y de dispersión estudiadas.

Ejercicios y problemas propuestos

110. Un estudio realizado A 350 personas sobre la edad de su pareja, reveló los siguientes datos:

Edad pareja	Cant. de personas
15 - 20	23
20 - 25	28
25 - 30	76
30 - 35	54
35 - 40	60
40 - 50	42
50 - 70	67

a. **Elabora** el gráfico que le corresponda.

b. **Calcula** la media, mediana y la moda

111. Las últimas cien ventas facturadas por un establecimiento se habían agrupado en cuatro intervalos de clase, recordamos tan solo la siguiente información:

- El primer intervalo tiene seis semanas como extremo superior, una frecuencia relativa de 0,2 y una amplitud de cuatro semanas.
- La marca de clase del segundo y cuarto intervalo son ocho y cincuenta semanas respectivamente.
- Hasta el segundo intervalo se acumulan sesenta ventas.
- El tercer intervalo presenta una frecuencia de treinta ventas y una amplitud de treinta semanas.

—Con esta información, **construye** la distribución de frecuencias y **calcula** la media, mediana, moda y coeficiente de variación.

112. Las indemnizaciones recibidas por los 42 propietarios de áreas de cultivo después de los recientes incendios forestales, se distribuyen del siguiente modo:

Cientos de dólares	Propietarios
20 - 50	8
50 -100	20
100 -140	8
150	5
220	1

a. Si las pérdidas se han valorado en más de $400.000, puede afirmarse que las indemnizaciones son suficientes.

b. **Calcula** la indemnización más frecuente.

c. **Calcula** la mediana y la media.

d. Si a todos los propietarios se les subiera la indemnización en $ 2 000. ¿Serían suficientes las indemnizaciones?, ¿cuál sería entonces la media?

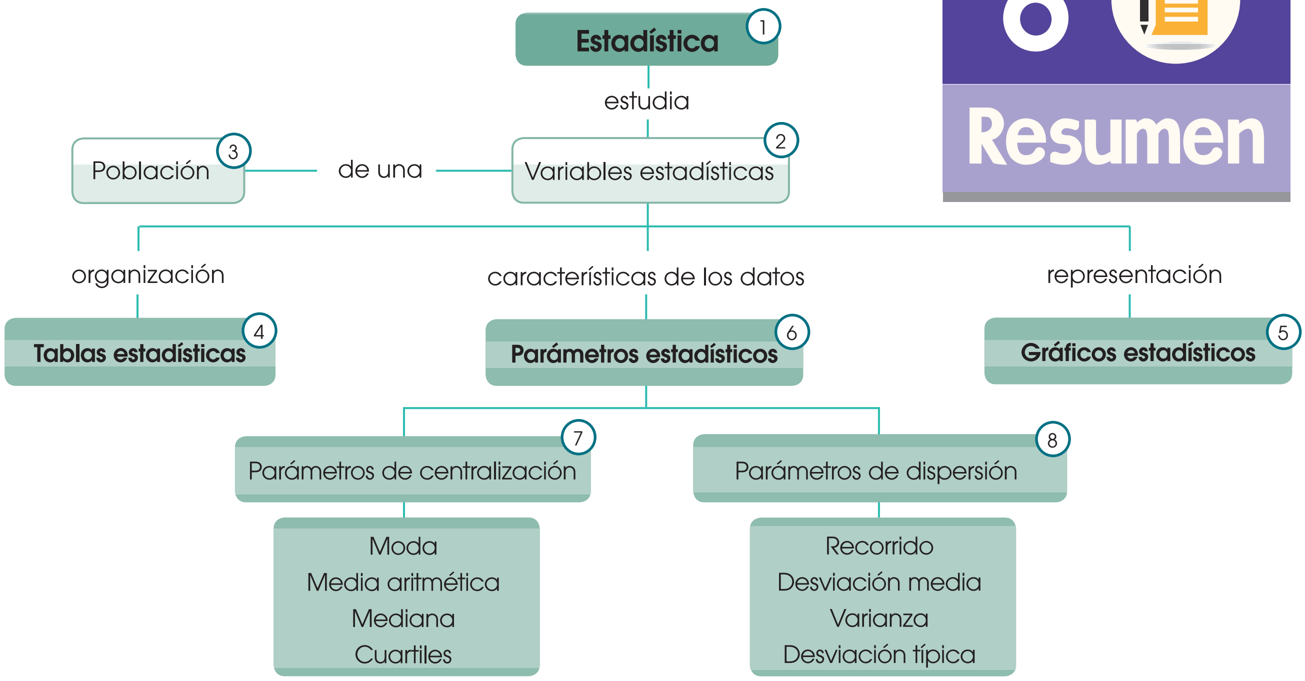
113. Durante la última semana dos librerías han vendido los libros que ocupan los tres primeros puestos en las listas de ventas a los siguientes precios:

Librería 1	
Precio	Nº Ejemplares
18	10
21	13
23	15

Librería 2	
Precio	Nº Ejemplares
15	25
19	18
20	25

a. ¿Qué establecimiento ha presentado una recaudación media más representativa?

b. ¿Cuál de los establecimientos presenta una mayor disparidad de precios?



1. La estadística se ocupa de recoger, ordenar y analizar datos para estudiar las características o el comportamiento de un colectivo.
2. Variable estadística es la propiedad o característica de la población que queremos estudiar.
3. Población es el conjunto de elementos que forman el colectivo objeto del estudio estadístico. Si la población es muy grande, se toma una muestra representativa de ella.
4. Una tabla estadística consiste en una organización de los datos que refleja las frecuencias absolutas y relativas, acumuladas o no, de los valores que la variable toma en la serie de datos.
5. La finalidad de los gráficos estadísticos es visualizar con más facilidad la información contenida en las tablas estadísticas. Los más utilizados son los diagramas de barras, los diagramas de sectores, los histogramas y los gráficos evolutivos y comparativos.
6. Los parámetros estadísticos son valores calculados a partir de los datos de una serie estadística que resumen alguna característica importante de la serie.
7. Los parámetros de centralización: son valores que pueden considerarse representativos de la serie de datos.
   - Moda, Mo: valor de la variable con una frecuencia absoluta mayor. Clase modal: intervalo con mayor frecuencia absoluta.
   - Media aritmética, $\overline{x}$: valor que resulta al dividir la suma de todos los datos entre el número total de ellos.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N}$$

   - Mediana, Me: Valor que ocupa el lugar central al situar todos los datos ordenados de menor a mayor. Si el número de datos es par, se suman los dos valores centrales y se divide el resultado entre 2. Clase medianal: Intervalo que contiene la mediana.
   - Cuartiles, se definen como los valores que separan la distribución en cuartas partes.

8. Los parámetros de dispersión: son valores que informan sobre la dispersión de los datos.
   - Recorrido, r: Diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la serie de datos. También se conoce como rango o amplitud.
   - Desviación media, d_m: Media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media aritmética.

$$d_m = \frac{\sum |x_i - \overline{x}| \cdot n_i}{N}$$

   - Varianza, σ^2: Media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de todos los datos respecto a su media aritmética.

$$\sigma^2 = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|^2}{N} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{x}^2$$

   - Desviación típica, σ: Raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Cuando los datos aparecen agrupados en intervalos, consideramos las marcas de clase de los diferentes intervalos como diferentes valores de la variable x_i y sus frecuencias absolutas como n_i .

Para finalizar

1 En la siguiente tabla aparece el peso (en gramos) de 100 comprimidos de un determinado medicamento.

Peso (g)	Número de veces
[4,45, 4,55)	1
[4,55, 4,65)	2
[4,65, 4,75)	10
[4,75, 4,85)	21
[4,85, 4,95)	33
[4,95, 5,05)	18
[5,05, 5,15)	9
[5,15, 5,25)	4
[5,25, 5,35)	2

a. **Construye** el histograma y el polígono de frecuencias.

b. **Calcula** la media aritmética y la desviación típica.

c. **Calcula** el primero y el tercer cuartiles, y el percentil 15.

d. ¿Qué porcentaje de comprimidos pesa menos de 4,87 g?

2 Se ha sometido a 18 personas a una prueba física de resistencia. El tiempo que ha aguantado cada una de estas personas viene recogido en los siguientes resultados, expresados en minutos:

39, 5 43, 2 40, 5 22, 5 44, 5 38,

5 42, 5 40, 3 46, 5 45, 6 40, 1 41

43, 5 40, 2 42, 7 45 45, 2 44, 2

a. **Agrupa** los datos en intervalos de longitud de 2 minutos.

b. **Obtén** la tabla de frecuencias para los intervalos definidos.

c. **Construye** el histograma de frecuencias absolutas.

3 Las temperaturas medias mensuales, en grados Celsius, de dos ciudades durante los nueve primeros meses de un año se muestran en esta tabla:

	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.
Ciudad A	2,7	3,6	8,1	12,3	16,5	22,1	25,7	28,9	22,6
Ciudad B	8,4	10,5	12,6	14,6	17,1	18,6	22,7	24,9	21,1

a. **Construye** un gráfico comparativo superponiendo los gráficos evolutivos correspondientes a las dos ciudades.

b. **Describe** cuándo es más elevada la temperatura en la ciudad A y cuándo en la ciudad B.

c. **Explica** en qué meses hay una mayor y una menor diferencia de temperatura.

d. **Calcula** la media aritmética de las temperaturas medias de cada una de las dos ciudades.

—¿Cuál de las dos ciudades es, por término medio, más cálida?

—En este caso, ¿resultaría útil comparar las dos ciudades tomando la moda como parámetro de centralización? **Justifica** tu respuesta.

e. **Calcula** la desviación típica de las temperaturas medias de cada una de las dos ciudades.

—¿En cuál de las dos ciudades han variado más las temperaturas? **Justifica** tu respuesta.

EVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

- Trabajo personal

¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo? ¿He cumplido mis tareas? ¿Qué aprendí en esta unidad temática?

- Trabajo en equipo

¿He compartido con mis compañeros y compañeras? ¿He respetado las opiniones de los demás?

- **Escribe** la opinión de tu familia.

- **Pide** a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

SOCIEDAD

Fueron los primeros...

Uno de los primeros vestigios de anotaciones estadísticas se encuentra en la isla italiana de Cerdeña, donde existen unos monumentos megalíticos de basalto construidos hacia el año 3 000 a. C. por los primeros habitantes de la isla, los nuragas. En dichas construcciones se han encontrado muescas y toscos signos con los que, al parecer, se llevaban las cuentas de la caza y del ganado.

SOCIEDAD

Lo último en estadística

Con la tecnología actual ya es posible aplicar una de las últimas novedades en este campo: la estadística en tiempo real. Con ella podemos saber cuántas personas hay hoy en el planeta o las computadoras que se venden al día. Mediante la web http://links.edebe.com/si5, accederemos a un algoritmo que se actualiza cada milisegundo y que está gestionado por un equipo internacional de expertos en la materia, procedentes de prestigiosas organizaciones y oficinas estadísticas.

Estadística de accesos instantáneos a un determinado navegador.

SENTIDO CRÍTICO

Estadística en Internet

Las nuevas tecnologías permiten acceder a fuentes de información hasta hace pocos años desconocidas.
En este sentido, Internet es una fuente de datos valiosísima y de muy fácil consulta.
Así, por ejemplo, diversas empresas privadas y entidades públicas facilitan en esta red los resultados de encuestas y estudios estadísticos.
Una de estas entidades públicas es el Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS), organismo autónomo adscrito al Ministerio de la Presidencia cuyo objetivo es el estudio de la opinión pública. El servidor de su banco de datos es accesible a través de Internet en la dirección: http://www.cis.es/
Existe otro servidor de datos estadísticos oficiales de gran interés: el del Instituto Nacional de Estadística, cuya dirección es: http://www.ine.es/
Por otra parte, resulta muy interesante acceder a la información que proporciona en Internet la UNICEF.
En la dirección http://www.unicef.org/ podrás encontrar abundante información relacionada con la situación de la infancia en el mundo.

SI YO FUERA....

Doctor...

necesitaría conocer y comprender todo lo referente a estadísticas para tomar decisiones en materia de diagnóstico, pronóstico y terapéutica de mis pacientes.
También necesitaría interpretar los exámenes que les mando, tanto de laboratorio, como rayos x, etc, con un conocimiento de las variaciones fisiológicas y de las correspondientes al observador y a los instrumentos.
Y tendría que comprender la información acerca de la etiología y el pronóstico de las enfermedades, a fin de asesorar a los pacientes sobre la manera de evitar las enfermedades o limitar sus efectos.

Proyecto

CENSO DEL COLEGIO

ELEGIMOS

El primer censo del que se tiene noticia se elaboró con el fin de preparar la construcción de las pirámides de Egipto. El fresco de la figura, descubierto en la ciudad de Tebas, representa el levantamiento de un muro.

1. **Busca** información.
2. En la página web de tu colegio o en noticias locales en internet busca información de tipo estadístico.

12 PLANIFICAMOS

3. **Elige** algunas que te parezcan interesantes.
   a. ¿Cómo se presentan?
   b. ¿Se utilizan gráficos? ¿De qué tipo?
   c. ¿Qué variables se relacionan?
   d. ¿Qué parámetros estadísticos estudiados en esta unidad crees que se aplicaron para llegar a esa información?
   e. Con la información que te proporcionan, ¿puedes asegurar que las variables están relacionadas?

TIC

Sigue los siguientes enlaces que te pueden servir de guía para elaborar tu censo:

http://goo.gl/03JxGM

http://goo.gl/15gmUJ

4. **Realiza** una encuesta para conocer datos generales de tu colegio como son:
   - Cantidad de estudiantes que estudian, por grados, por género y edades.
   - Cantidad de profesores y directivos.
   - Distancia a la que viven los estudiantes del colegio (representa en una tabla de datos agrupados en intervalos).
   - Cantidad de miembros de la familia de los estudiantes, etc.

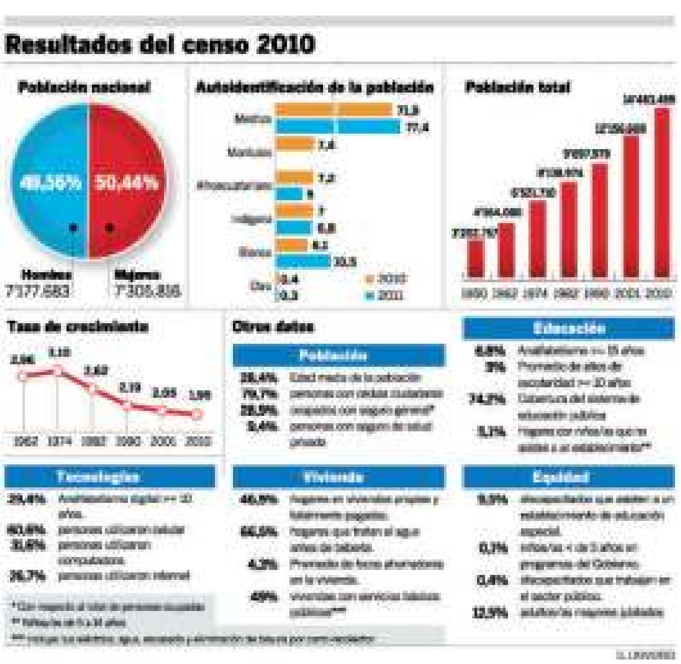
   (Pueden incluir otros datos de interés que tu profesor te pida para completar el censo).

DESARROLLAMOS

5. **Elabora** el censo de tu colegio con toda la información recopilada:
6. **Construye**, con las TIC, las tablas de frecuencias para todas las variables estadísticas utilizadas.
7. **Redacta** una noticia en la que se expliquen los resultados que has obtenido. Debe tener el formato de una noticia de prensa, con un título impactante, gráficos, datos, argumentos, conclusiones...
8. **Responde** a las siguientes preguntas para elaborar un informe:
   a. ¿Conocías la utilidad de todos los contenidos estudiados en esta unidad?
   b. ¿Consideras que es muy útil conocer cómo hacer recuento de datos, elaborar tablas y gráficos estadísticos y calcular parámetros estadísticos?
   c. ¿Qué gráficos estadísticos ha sido más útil para presentar dicha información?
   d. ¿Crees que va a ser de gran utilidad para tu colegio este censo?
   e. ¿Qué decisiones futuras se pueden tomar con toda esta información recopilada?
   f. ¿Cuál ha sido la mayor dificultad con la que te has encontrado? ¿Qué solución le has dado?
   g. ¿Qué es lo que has aprendido en la realización del proyecto?

—**Valora** tu participación en el proyecto.

Actividades



http://goo.gl/arXcLz

http://goo.gl/DgWszv

Repasamos

Unidades 4, 5, 6

1 Un auto viaja 20 km. hacia el norte, y a partir de allí 35 km. a 60° en dirección noroeste. **Encuentra** el módulo y la dirección del vector desplazamiento total.

2 Una tortuga se desplaza en línea recta desde el punto A (2, 1) hasta el punto B (5, 7). Parte del punto A y efectúa una parada cada vez que recorre del camino.

a. ¿Qué distancia ha recorrido?

b. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos en los que se detiene?

3 Dado el segmento que une los puntos A (1, −1) y B (2, 3), **determina** la ecuación de la recta perpendicular al segmento y que lo corta por el punto medio.

4 Dados los puntos A = (7, 5) y B = (−2, 4), **determina** las componentes del vector libre $[(\overrightarrow{AB})]$.

a. ¿Cuál será el extremo de uno de sus representantes con origen en el punto $C = (-1, 3)$?

b. **Halla** las coordenadas de los puntos M, N y P que dividen al segmento AB en cuatro partes iguales.

5 Dados los puntos A(-1, 2) y B(2, 0) del plano, **halla**:

a. las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

b. el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

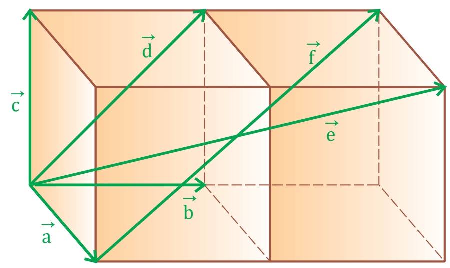
c. **Representa** gráficamente el vector.

6 Un perro que busca un hueso camina 3,5 metros hacia el sur, después 8,2 metros en un ángulo de 300 al Noreste y finalmente 15 metros al Oeste. **Halla** el vector de desplazamiento resultante del perro.

7 Una grúa arrastra un auto con una fuerza de 3000 N que forma un ángulo de 40° con la horizontal. **Calcula** los valores de las componentes horizontal y vertical de dicha fuerza.

8 Sean los puntos P (6, 6) y Q (−2, 2). **Halla** las coordenadas de un punto alineado con P y Q, y cuya distancia a Q es el triple que su distancia a P.

9 **Fíjate** en estos seis vectores representados en el espacio:



a. **Indica** si los vectores a, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.

b. **Expresa** cada uno de los vectores d, e y f en función de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

c. Cualquier base del plano tiene dos, y solo dos vectores. ¿Cuántos vectores tendrán una base en el espacio?

Y TAMBIÉN: ¿?

Utilización de ideas geométricas en la navegación, la arquitectura y el arte

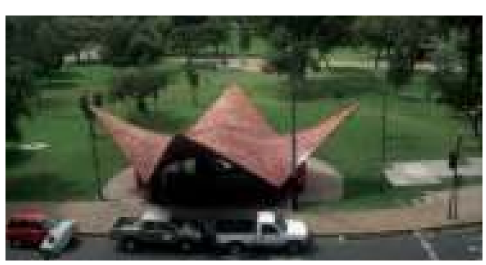
La utilización de vectores no es exclusiva del ámbito matemático.

Los vectores son un caso particular de sistema de coordenadas, por lo que se emplean para resolver problemas en muchos ámbitos científicos, artísticos y tecnológicos.

En cartografía se hace uso de vectores, pero expresados en coordenadas distintas de las rectangulares (x, y). Se utilizan coordenadas esféricas, y se habla de longitud y latitud en vez de abscisa y ordenada. En astronomía y en navegación marítima puede determinarse la latitud a partir de la altura de los astros. Esta altura viene dada por el ángulo que forma con los ejes fijos en el observador el vector que une el astro con el origen de los ejes. Es de uso habitual en observación astronómica.

Asimismo, los controladores aéreos de los aeropuertos utilizan vectores para describir la posición de los aviones en cada instante.

Al trabajar con vectores de más de dos componentes, pueden obtenerse las denominadas *superficies regladas*.



http://goo.gl/ToUd0c

10 Dados los vectores $\vec{u}$=(3, -2) y $\vec{v}$=(1, 1), **calcula** analítica y gráficamente:

a. $\vec{u}+\vec{v}$ b. $\vec{u}-\vec{v}$ c. $2\vec{u}$ d. $-2\vec{v}$

11 Dados los vectores $\vec{u}$ = (2,-1) y $\vec{v}$= (0,3), **determina**:

a. El módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b. El producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c. El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d. Un vector ortogonal a $\vec{u}$

e. Un vector ortonormal a $\vec{u}$

12 Dados los vectores $\vec{u}$= (k, -1) y $\vec{v}$= (2, 3) **determina**: el valor de k para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

13 Las componentes de los vectores u y v en una base ortonormal son $\vec{u}$ = (1, 2) y $\vec{v}$= (7 + k, k). **Halla** el valor de k sabiendo que los vectores $3\vec{u}-\vec{v}$ y $2\vec{u}+\vec{v}$ son ortogonales.

14 **Halla** un vector de módulo 2 de la misma dirección y sentido contrario que $\vec{v}$= (−3, 4).

15 Los vectores $([\overrightarrow{AB}])$ y $([\overrightarrow{PA}])$ verifican $([\overrightarrow{AB}]) = 2.([\overrightarrow{PA}])$

a. **Halla** el valor de r en la siguiente igualdad. $[(\overrightarrow{PB})] = r\,[(\overrightarrow{AP})]$

b. **Halla** las coordenadas del punto P si A = (−1, 4) y B = (−7, 8).

16 **Halla** un vector de módulo 2 sabiendo que forma un ángulo de 60° con el vector $\vec{w}$= $(1, \sqrt{3})$.

17 **Calcula** el valor de a para que las rectas r: $ax + (5a-6)\cdot y = 2a + 3y$ s: $x + ay = a$ sean:

a. Paralelas

b. Perpendiculares

18 **Calcula** el valor de m y n para que los vectores

$\vec{u}=\left(\frac{1}{2}; m\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; n\right)$ sean unitarios.

19 **Halla** el valor de m para que los vectores $\vec{u}$= (1, m) y $\vec{v}$ = (3, 4) sean ortogonales.

20 Dados los vectores x = (2, 3) e y = (−1, 4):

a. **Normalízalas**.

b. **Halla** el ángulo que forman dichos vectores.

c. **Halla** un vector unitario y ortogonal al x.

21 Se sabe que $\vec{u}\cdot\vec{v}$= 10, $\vec{u}$ = (a, 3) y $|\vec{v}|$ =4 y ángulo (u, v) = 60°. **Halla** el valor de a.

22 Un vector fijo tiene su origen en el punto A (2, −1) y es equipolente al vector CD (−1, 4).

—**Determina** las coordenadas de su extremo y su módulo.

23 Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos A (1, −3), B (2, 2) y C (−3, 0).

—**Calcula** las coordenadas del cuarto vértice.

24 **Halla** el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en los siguientes casos:

a. $|\vec{u}|$= 2, $|\vec{v}|$= $\frac{1}{4}$; $(\vec{u};\vec{v})$ = 60º

b. $|\vec{u}|$= 3, $|\vec{v}|$ = (2, −3); $(\vec{u};\vec{v})$ = 45º

c. $\vec{u}$= (3, ½); $\vec{v}$= (-1,3)

25 Dados los vectores $\vec{u}$ (1, −2), $\vec{v}$ (3, 1) y $\vec{w}$ (2, 0),

a. **Calcula** las coordenadas del vector $2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}$.

b. **Expresa** w como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c. **Calcula** los ángulos que forman dos a dos.

d. **Halla** un vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo $\sqrt{20}$.

26 **Halla** la distancia entre los extremos del vector $\vec{a}$ (-9, 40).

27 **Halla** el perímetro del triángulo ABC, cuyos vértices están en los puntos A (4, -2), B (-2, 6) y C (-8, -2) y **comprueba** que es isósceles.

28 Dado el punto A (3, 2), **halla** las coordenadas de otro punto B, sabiendo que está sobre el eje de ordenadas y que dista 5 unidades del punto A

29 **Representa** los puntos A (2,-2) y B (2, 5.5) y **calcula** la distancia que los separa.

30 Si $\vec{u}$ (2, a) y $\vec{v}$, (1, -4) **determina** el valor de a para que:

a. $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sean perpendiculares;

b. $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tengan el mismo módulo,

c. $\vec{u}\cdot\vec{v}$, = 10.

Elementos en un plano

31 Las tres rectas r: $y - 2x = 0$, s: $x - 5 = 0$ y t: $2x + 3y = 12$ y el eje de coordenadas forman un polígono de cuatro lados y vértices A, B, C y D.

a. **Dibuja** el polígono.

b. **Determina** los vectores libres ($[\overrightarrow{AB}]$), $[(\overrightarrow{BC})]$, ($[\overrightarrow{CD}]$) y ($[\overrightarrow{DA}]$), y que permiten pasar de un vértice cualquiera a otro vértice adyacente.

32 Un objeto está atado a dos cuerdas simétricamente según la figura. El objeto pesa 2 000 N (P).

a. **Calcula** la fuerza de tensión de cada cuerda (T) para que entre las dos cuerdas compensen el efecto de gravedad.

33 **Calcula** los vértices y el área del triángulo formado por las siguientes rectas:

r : $2x + 3y = 3$ s : $6x - y = -21$ t : $-2x + 7y = -13$

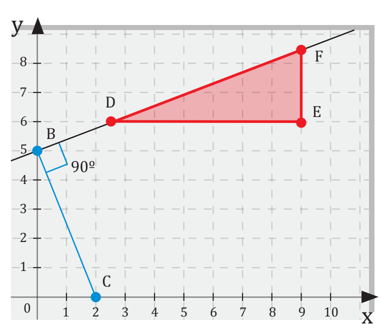
34 **Calcula** los vértices y el área del polígono determinado por las rectas:

r : $y = 2x - 1$ s : $2x - y + 3 = 0$ t : $2x + 3y + 3 = 0$ u : $y = -\frac{2x}{3} + 3$ ¿De qué polígono se trata?

35 **Calcula** los vértices del cuadrado en el que uno de los lados viene determinado por los puntos A = (3, 5) y B = (9, 2).

36 Las ecuaciones de dos lados de un cuadrado son $-x + 2y = 1$ y $-x + 2y = -14$. **Halla** los vértices y las ecuaciones de los otros dos lados, sabiendo que el punto Q (-1, -5) está en uno de los lados de este cuadrado.

37 **Calcula** los vértices, lados y área del triángulo DEF.



38 Dado el triángulo de vértices A (-1, -1), B (1, 4) y C (5, 2), **halla** las ecuaciones de sus tres medianas y **calcula** el baricentro (punto de intersección de las medianas).

39 **Halla** la ecuación implícita de la recta que pasa por P (-2, 5) y es paralela al vector (-1, 3).

40 ¿Cuál ha de ser el valor de k para que estas dos rectas sean paralelas? $x + 3y - 2 = 0$ $kx + 2y + 3 = 0$

41 **Halla** el área del paralelogramo de vértices A (1, 1), B (5, 2), C (4, 4) y D (0, 3).

42 Dados los puntos P (3, 2) y Q (-2, 4), y la recta r: $2x + y - 3 = 0$; **calcula** la distancia:

a. Entre P y Q.

b. De P a r.

43 **Indica** la posición de la recta r: $y = -2x - 2$ respecto a cada una de las siguientes rectas:

a. $2y = -4x - 4$

b. $y = \frac{1}{2}x - 2$

c. $y = -2x - 2$

d. $y = -\frac{1}{2}x - 2$

44 Dos rectas tienen la misma ordenada en el origen. ¿Qué posición relativa pueden tener?

45 **Determina** la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 4) y es perpendicular a la recta $y = -2x-2$.

a. **Calcula** las coordenadas del punto en el que se cortan ambas rectas.

46 Dadas las rectas p, q, r y s cuyas ecuaciones respectivas son:

p: $y = x$

q: $y = x + 2$

r: $x = y - 2$

s: $y = -x + 3$

Indica cuáles son coincidentes, cuáles paralelas y cuáles secantes.

47 **Halla** el área del triángulo que determina la recta y $\frac{1}{2}$ x +3 con los ejes de coordenadas.

48 **Determina** las coordenadas de los dos puntos que se encuentran a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades de longitud del punto A (1, 2) y pertenecen a la recta $y = x + 1$.

49 La distancia entre los puntos A (1, 1) y B (4, a) es d(A, B) = 5. **Calcula** la pendiente de la recta que pasa por A y B.

50 Tres rectas se cortan en un punto y los ángulos que forman entre ellas son iguales. Sabiendo que una de las rectas es paralela al eje de las abscisas, **calcula** las pendientes de las rectas.

51 De dos rectas perpendiculares, sabemos que una pasa por el punto A (1, 3) y forma un ángulo de 45º con el eje de las abscisas y que la otra pasa por el punto B (−3, −3). **Calcula** las pendientes de las rectas y el punto de corte.

52 **Calcula** la ecuación de la recta paralela a $3x + 2y + 6 = 0$ y que pasa por el punto $A(1, -1)$.

53 **Determina** la posición relativa de las rectas r, s y t.

a. r: $y = 2x + 3$

s: $y = -2x + 3$ t: $2y = 10x + 6$

b. r: $2x + y = 2$

s: $-3y - 6 = 6x$ t: $\frac{y}{2} - x + 1$

c. r: $\frac{1}{2}x = 5y + 4$

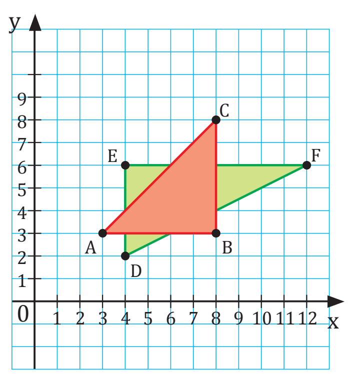
s: $10y - x = -8$ t: $y = -\frac{x}{10} - \frac{4}{5}$

54 **Calcula** la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (−1, −1) y B (2, 5).

55 **Calcula** la ecuación de la recta paralela a $y = -3x + 2$ que pasa por el punto (3, 3).

56 **Indica** la posición relativa de las rectas r y s. r : $y = x + 2$ s: $y = -x + 5$

57 **Observa** esta figura:



a. **Indica** las coordenadas de los vértices de los triángulos ABC y DEF.

b. **Escribe** la ecuación de la recta que contiene cada uno de los lados de los dos triángulos.

c. **Halla** los puntos de corte de los triángulos ABC y DEF.

58 Dadas las rectas r : $ax + (a - 1)y - 2(a + 2) = 0$ y s : $3ax - (3a + 1)y - (5a + 4) = 0$, **calcula**:

a. El valor de a para que las rectas sean paralelas.

b. El valor de a para que sean perpendiculares.

c. **Halla** en este caso el punto de corte.

59 Dado el triángulo de vértices A = (- 4, 2), B = (-1, 6) y C = (3, -2), **calcula**:

a. La ecuación canónica de la recta determinada por el segmento BC.

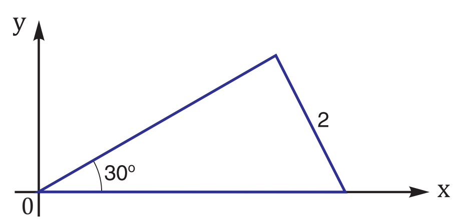
b. La altura que parte del vértice A.

c. La mediana que parte del vértice B, en forma paramétrica.

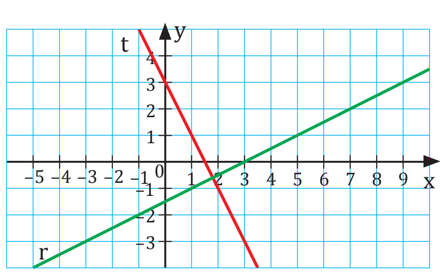
d. El área del triángulo.

e. El ángulo ACB.

60 **Determina** las ecuaciones de las tres rectas que forman el siguiente triángulo rectángulo:



61 **Indica** la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas *r* y *t*, y **escribe** la ecuación de cada una de ellas.



62 **Halla** la ecuación de la recta paralela a $y = 2x + 3$ que pasa por el punto (1, 2). **Halla** las coordenadas del punto en que se cortan las rectas $y = -2x - 8$ e $y = \frac{1}{3}x - 1$

63 **Escribe** las diferentes formas de la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, -3) y que tiene por vector director $\vec{v} = (-2, 4)$.

64 **Escribe** la ecuación del haz de rectas de vértice $A = (-2, 0)$.

65 **Encuentra** la ecuación de la recta que pasa por (1, 1) y es paralela a la recta de ecuación $-3x + y = -5$.

66 **Indica** el ángulo que forman, en cada caso, las rectas r y s.

a. $r: x - y + 2 = 0$ $\quad$ $s: -2x - 4y + 3 = 0$

b. $r: 2x + y + 2 = 0$ $\quad$ $s: -x - y + 3 = 0$

67 **Halla** la recta que pasa por $A = (1, -1)$ y es perpendicular a s en cada caso:

a. $s: 3x - 2y + 4 = 0$

b. $s: y = -2x + 5$

c. $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{3}$

68 **Indica** la posición relativa de las rectas r y s en cada uno de los casos siguientes

a. $r: 2x - 3y + 4 = 0;$ $\quad$ $s: -x + 3y + 2 = 0+$

b. $r: -x - y + 2 = 0;$ $\quad$ $s: 2x + 2y - 1 = 0$

c. $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{-1};$ $\quad$ $s: y = 2x - 4$

69 **Halla** un punto de la recta $r: x + y - 1 = 0$ cuya distancia al punto $Q = (5, 2)$ sea $3\sqrt{2}$ unidades.

70 Dos lados opuestos de un cuadrado están sobre las rectas $r: 3x + 4y + 5 = 0$ y $s: 6x + 8y - 10 = 0$. **Calcula** el área del cuadrado.

71 **Determina** la ecuación y la gráfica de la recta que:

a. Pasa por los puntos (–3, 2) y (5, 7).

b. Pasa por (–1, –2), y con pendiente igual a 2.

c. Con ordenada al origen igual a –3, y pendiente igual a 5.

72 **Halla** la ecuación de la recta que pasa por el punto (–7, –9), y que es paralela a la recta cuya ecuación es: $y - 5x + 9 = 7$.

73 **Demuestra** que las siguientes rectas son paralelas: la primera tiene por ecuación, $3y - 6x - 9 = 0$; la segunda pasa por los puntos (0, 7) y (–3, 1)

74 **Demuestra** que los puntos (1, 1), (5, 3), (8, 0), (4, –2) son los vértices de un paralelogramo.

75 Del triángulo con vértices en los puntos (-3, 2), (5, -2) y (1, 3). **Determina**:

a. La ecuación de cada una de las rectas que lo definen.

b. Su área.

c. La ecuación de la mediatriz de cada uno de los segmentos que conforman el triángulo.

d. El punto de intersección de las mediatrices.

e. La ecuación de cada una de sus medianas.

76 **Demuestra** que los siguientes puntos son vértices de un triángulo isósceles y que en él, los ángulos opuestos a sus lados iguales, son iguales. $A (6, 2)$, $B (2, -3)$ y $C (-2, 2)$.

77 **Determina** si las siguientes rectas son perpendiculares:

a. La primera tiene por ecuación: $y + 3x - 27 = 0$. La segunda pasa por (0, 3), y por (9, 6).

b. La primera pasa por (0, 5) y (7, 19). La segunda pasa por (6, 0) y (–4, 5).

78 **Determina** las coordenadas del punto en el que se cortan las mediatrices del triángulo cuyos vértices se encuentran en los puntos: (–2, 1), (4, 7) y (6, 3).

LA ESTADÍSTICA DEL PASADO


http://goo.gl/I3ONKS

El término estadística comparte la misma raíz que la palabra estado, tanto en su sentido habitual de situación como en su sentido político de nación. Esta semejanza histórica no se detiene en la forma, sino que resulta ser mucho más profunda.

Durante siglos, el significado de la palabra estadística ha sido el de la descripción de la situación de la nación; es decir, de sus características sociales, geográficas y económicas.
Según este criterio histórico, la primera noticia que se tiene sobre la elaboración de un estudio estadístico se remonta a finales del cuarto milenio antes de Cristo. En aquel tiempo, según el historiador griego Heródoto, se efectuó en Egipto un censo con el fin de preparar la construcción de las pirámides.
En la Roma clásica encontramos la estadística convertida en un verdadero instrumento al servicio de la administración pública. En la época imperial era común la elaboración periódica de registros tributarios, comerciales, militares.
La llegada de la Edad Media supuso un retroceso de la ciencia occidental en su conjunto y, en particular, un abandono casi absoluto del interés por la estadística. Más tarde, la época renacentista trajo consigo el desarrollo de una nueva rama de las matemáticas que influyó de forma notable en la evolución de esta disciplina: el cálculo de probabilidades.

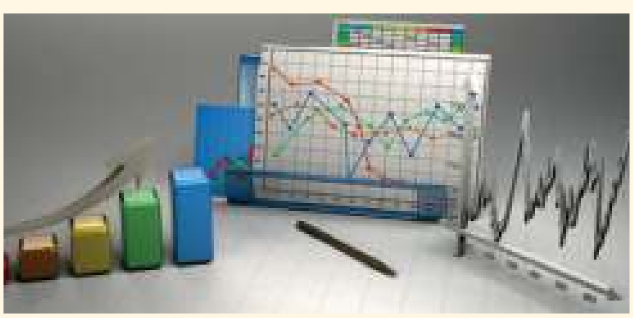
LA ESTADÍSTICA MODERNA

El inglés J. Graunt publicó en 1662 su *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*, considerado el primer trabajo sobre estadística de la población.

Algo más tarde, en 1671, el holandés J. de Witt protagonizó un importante avance en este campo al incorporar a esta disciplina los trabajos sobre probabilidad de Ch. Huygens. En esta línea, a lo largo del siglo XVIII se desarrolló una cada vez más intensa relación entre la estadística y el cálculo de probabilidades.

Esta empresa culminó en 1835 de la mano del astrónomo belga L. A. J. Quételet. Sus investigaciones le llevaron a la conclusión de que la información contenida en grandes masas de datos podía estudiarse teniendo como modelo la distribución normal. A él se deben también conceptos fundamentales en estadística como media o desviación.

La escuela angloamericana



Las ideas de L. A. J. Quételet fueron el origen de un rápido desarrollo en la aplicación de las técnicas estadísticas. Tienen especial relevancia los estudios del naturalista inglés F. Galton, en los que introdujo el concepto de correlación y los fundamentos del actual análisis de regresión. La herencia de F. Galton se reconoce en la llamada escuela angloamericana, cuyos máximos exponentes fueron K. Pearson y R. A. Fisher.

HERRAMIENTA DE FUTURO

Gran parte de los logros de la estadística se derivan del interés de los científicos por desarrollar modelos que expliquen los fenómenos cotidianos.
La estadística se utiliza en la investigación científica y en la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre y riesgo. En las ciencias naturales se emplea en la descripción de modelos termodinámicos complejos (mecánica estadística), en física cuántica, en mecánica de fluidos o en la teoría cinética de los gases. En las ciencias de la salud permite establecer pautas sobre la evolución de las enfermedades y los enfermos, los índices de mortalidad asociados a procesos morbosos o el grado de eficacia de un medicamento.

Un alto en el camino

1. El dominio y el recorrido de la función $f(x) = +\sqrt{(x+4)}$ es:

   a. $D(f) = [4, +\infty)$; $R(f) = (0, +\infty)$

   b. $D(f) = (-4, +\infty)$; $R(f) = [0, +\infty)$

   c. $D(f) = [-4, +\infty)$; $R(f) = [0, +\infty)$

2. La función $f(x) = x2 - 4x$ tiene una tasa de variación media igual a 1 en el intervalo $[0, m]$. El valor de m es:

   a. 1 b. 2 c. 5 d. 4

3. Si $h(x) = \sqrt{\frac{11x+2}{x}}$ y $g(x) = 7x$ -3, el valor de $2\,h(5) + g(5)$ es:

   a. -24 b. 40 c. 64 d. 20

4. **Relaciona** la recta determinada en cada uno de los siguientes casos con su ecuación:

   a. Pasa por el punto $A\ (5, 3)$ y tiene pendiente -2.

   b. Pasa por los puntos $A\ (5, -2)$ y $B\ (3, 2)$.

   c. Forma un ángulo de 45° con el sentido positivo del eje de las abscisas.

   d. Pasa por el punto $A\ (5, -11)$ y tiene por vector director $v = (-2, 4)$.

   1. $y = -2x - 1$
   2. $y = -2x + 13$
   3. $y = -2x + 8$
   4. $y = x + 4$

5. **Indica** si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. **Justifica** tus respuestas.

   a. Las notas de Matemáticas de los alumnos de una clase representan una variable cualitativa.

   b. Las edades de las personas son variables cuantitativas discretas.

   c. Las tallas de ropa son variables cuantitativas continuas.

   d. Las variables cualitativas son siempre variables discretas.

6. La relación entre los cuartiles y los percentiles es:

   a. $Q_1 = P_{25}$ y $Q_3 = P_{75}$ b. $Q_1 = P_{10}$ y $Q_3 = P_{30}$ c. $Q_1 = P_{75}$ y $Q_3 = P_{25}$

7. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$ en $x = -2$ es:

   a. $-7x + 8y + 18 = 0$ b. $7x + 8y - 18 = 0$ c. $y = \frac{7x}{8} + 18$

8 **Asocia** cada función con su derivada:

A	B
a. $f(x) = -2x^4 + x$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
b. $f(x) = 2x^3 - 5x + 12$	$\dfrac{-2x^2+8x+8}{(x^2+2x)^2}$
c. $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+2x}$	$6x^2-5$
d. $f(x) = \sqrt{(x^2-1)}$	$-8x^3+1$

9 Si $h(x) = \sqrt{(3x^2+2x)}$ y $g(x) = 12x + 5$, **Halla**:

a. $g(x) - 2h(x)$ b. $g(x) + h(x)$ c. $h(x) \circ g(x)$ d. $(h \circ g)(4)$

10 **Calcula** la derivada de las siguientes funciones:

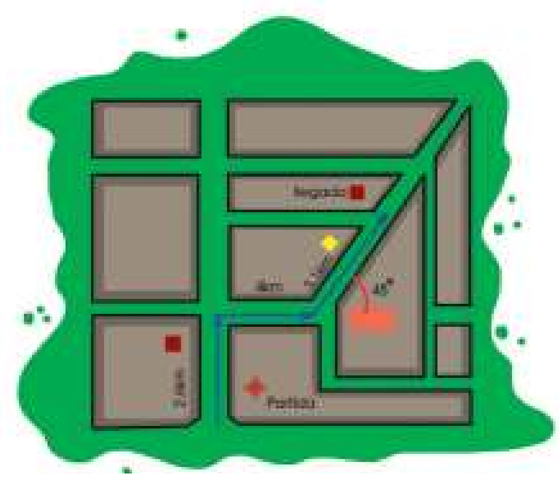
a. $f(x) = (3x+5)^4$ b. $f(x) = \ln(4x^2+2)$ c. $f(x) = e^{\text{sen}\, x}$

Encuentra el valor de a para que las rectas $r: ax + (5a-6) \times y = 2a + 3$ $s: x + ay = ay$ sean:

a. Paralelas

b. Perpendiculares

11 Un cartero tiene un recorrido como se muestra en el diagrama. **Halla** analíticamente el desplazamiento resultante, en módulo, dirección y sentido.



12 En un almacén se hace un inventario y se pesan todos los paquetes que hay. La siguiente tabla recoge los resultados:

Peso	Paquetes
$0 \leq x \leq 10$	32
$10 \leq x \leq 20$	25
$20 \leq x \leq 30$	11
$30 \leq x \leq 40$	7
$40 \leq x \leq 50$	1

a. ¿Cuántas clases se utilizaron?

b. ¿Cuál fue la amplitud de clase utilizada?

c. ¿Cuántos paquetes pesan menos de 20 kg?

d. **Calcula** el peso promedio de los paquetes.

e. **Determina** la clase modal y clase mediana de los pesos.

BIBLIOGRAFÍA

— ALSINA, C. TRILLAS, E. (1996). *Lecciones de álgebra y geometría*. Barcelona: Ed. Gustavo Gili.

— APÓSTOL, T. M. (1999). *Calculus* (2 vol.). Barcelona: Ed. Reverté, 2.ª edición.

— BARTLE, R. G y SHERBERT, D. R. (1996). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Ciudad de México: Ed. Limusa, 2.ª edición.

— BERNIS, F., MALET, A. y MOLINAS, C. (1999). *Curso de problemas de matemáticas*. Madrid: Ed. Noguer.

— BOYER, C. B. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid. Alianza editorial.

— COURANT, R. y ROBBINS, H. (1979). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Ed. Aguilar.

— CUADRAS, C. M. (1999). *Problemas de probabilidades y estadística*. 2 vol. Barcelona: PPU.

— Colección «Matemáticas: cultura y aprendizaje». Madrid: Ed. Síntesis.

— DE GUZMÁN, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Ed. Labor.

— GRANDVILLE, W. A. (2009). Cálculo diferencial e integral. Limusa.

— HUSSING, H. y ARNOLD, W. (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.

— KLINE, M. (1974). *Matemáticas en el mundo moderno*. Barcelona: Ed. Blume.

— MASON, S. (1996). *Historia de las ciencias*. 5 vols. Madrid: Alianza editorial, 4.ª reimpresión.

— MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: MEC y Ed. Labor.

— MATAIX, J. L. (1970). *Teoría de errores*. Madrid: Ed. Dossat.

— PAPOULIS, A. (1980). P*robabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos*. Barcelona: Ed. Eunibar.

— POLYA, G. (1992). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Ciudad de México: Ed. Trillas.

— QUEYSANNE, M. (1999). *Álgebra básica*. Barcelona: Ed. VicensVives, 2.ª edición.

— RAMOS, A. (2003). *Ejercicios de geometría*. Madrid: Ed. Tebar Flores.

— SPIVAK, M. (1995). *Calculus*, Barcelona: Ed. Reverté, 2.ª edición.

— SERRES, M. (2001). *Historia de las ciencias.* Madrid: Ed. Cátedra, Colección Teorema.

— XAMBÓ, J. (1977). *Álgebra lineal y geometrías lineales*. Barcelona. Ed. Eunibar.

— WHIMBEY, A. y LOCKHEAD, J. (2003). *Comprender y resolver problemas*. Madrid: Visor Distribuciones.

Láminas de apoyo

Logaritmo de un producto

El logarítmo del producto de dos números reales x e y es igual a la suma de los logaritmos de dichos números.

$$\log (x \cdot y) = \log x + \log y$$

Demostración

Sean a y b los logaritmos de x e y, respectivamente

$$\log x = a; \log y = b$$

Por la definición de logaritmo, tenemos que:

$$\log x = a \Leftrightarrow x = 10^{a}; \log y = b \Leftrightarrow y = 10^{b}$$
$$x \cdot y = 10^{a} \cdot 10^{b} = 10^{a+b} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log (x \cdot y) = a + b = \log x + \log y$$

Logaritmo de un cociente

El logaritmo del cociente de dos números reales x e y es igual a la diferencia de los logaritmos de dichos números.

$$\log \left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

Demostración

Sean a y b los logaritmos de x e y, respectivamente.

$$\log x = a; \log y = b$$

Por la definición de logaritmo, tenemos que:

$$\log x = a \Leftrightarrow x = 10^{a}; \log y = b \Leftrightarrow y = 10^{b}$$
$$\frac{x}{y} = 10^{a-b} \Rightarrow \log \left(\frac{x}{y}\right) = a - b = \log x - \log y$$

Logaritmo de una potencia

El logaritmo de la potencia de base el número real x y exponente el número real y es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

$$\log x^{y} = y \cdot \log x$$

Demostración

Sean $a = \log x$

Por definición de logaritmo, tenemos que $10^{a} = x$.

De aquí deducimos:

$$x^{y} = (10^{a})^{y} = 10^{ay} \Rightarrow \log x^{y} = a \cdot y = y \cdot \log x$$

Logaritmo de un cociente

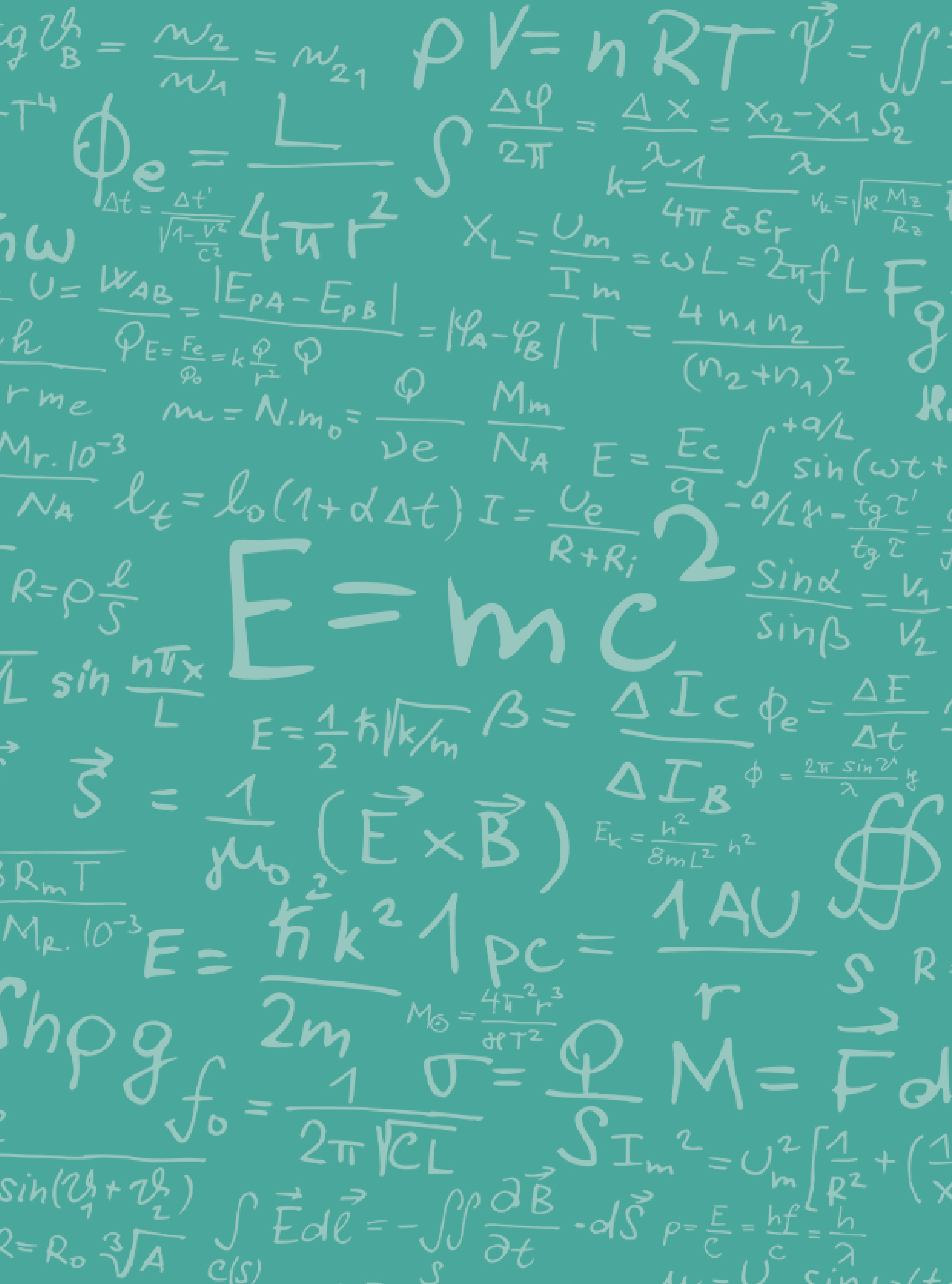
El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz.

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{\log x}{n}$$

Demostración

Observa que si expresamos $\sqrt[n]{x}$ como $x^{\frac{1}{n}}$ y aplicamos la propiedad anterior, obtenemos:

$$\log \sqrt[n]{x} = \log x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log x = \frac{\log x}{n}$$

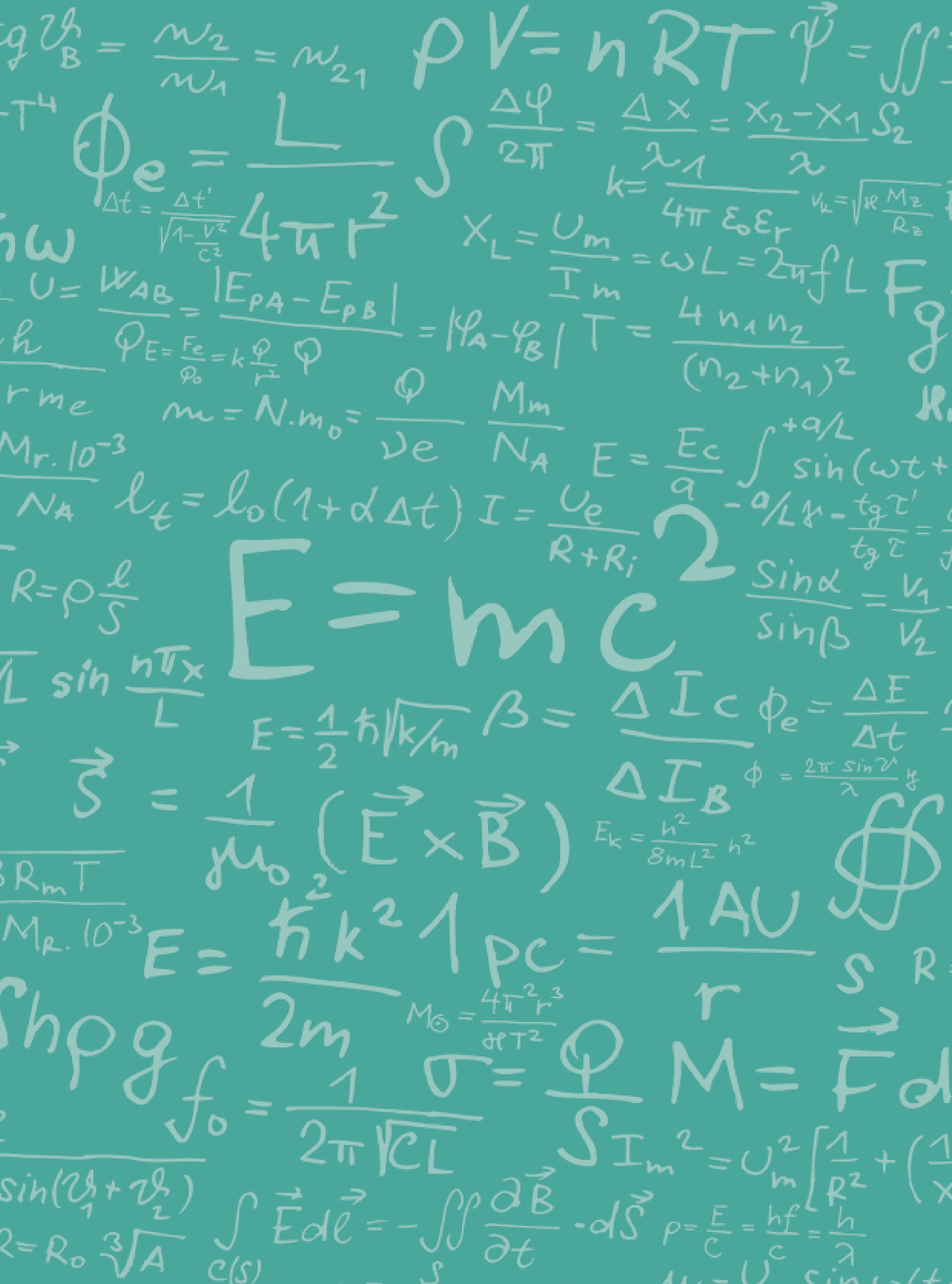


pV=nRT
E=mc²

DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

Función	Función derivada
$f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(-1) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

Derivada de la función suma	**Derivada del producto de una constante por una función**
$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$	$f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$
Derivada de la función producto	**Derivada de la función cociente**
$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$	$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
Derivada de la función compuesta: regla de la cadena	
$f(x) = (g \circ h)(x) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$	


pV=nRT
E=mc²
M=Fd
1 AU
1 pc=
X_L = U_m / I_m = ωL = 2πfL
T = 4n₁n₂ / (n₂+n₁)²
l_t = l₀(1+αΔt)
I = U_e / (R+R_i)
R=ρ l/S
f₀ = 1 / 2π√CL
E = ħ²k² / 2m

OPERACIONES CON VECTORES

Operaciones con vectores

Producto de un número real por un vector: $k \cdot \vec{u}$

Suma y resta de vectores: $\vec{u} \pm \vec{v}$

Combinación lineal de vectores

Escritura de vectores utilizando las operaciones con vectores.

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$$

Bases de V2

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con diferente dirección forman una base y si:

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$$

a y b son las componentes de $\vec{u}$ en esta base.

Operaciones con componentes

Podemos usar las componentes de los vectores para efectuar operaciones:

Producto de un número real por un vector:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

Suma y resta de vectores:

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2)$$

Producto escalar de dos vectores

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$

Expresión analítica en una base ortonormal:

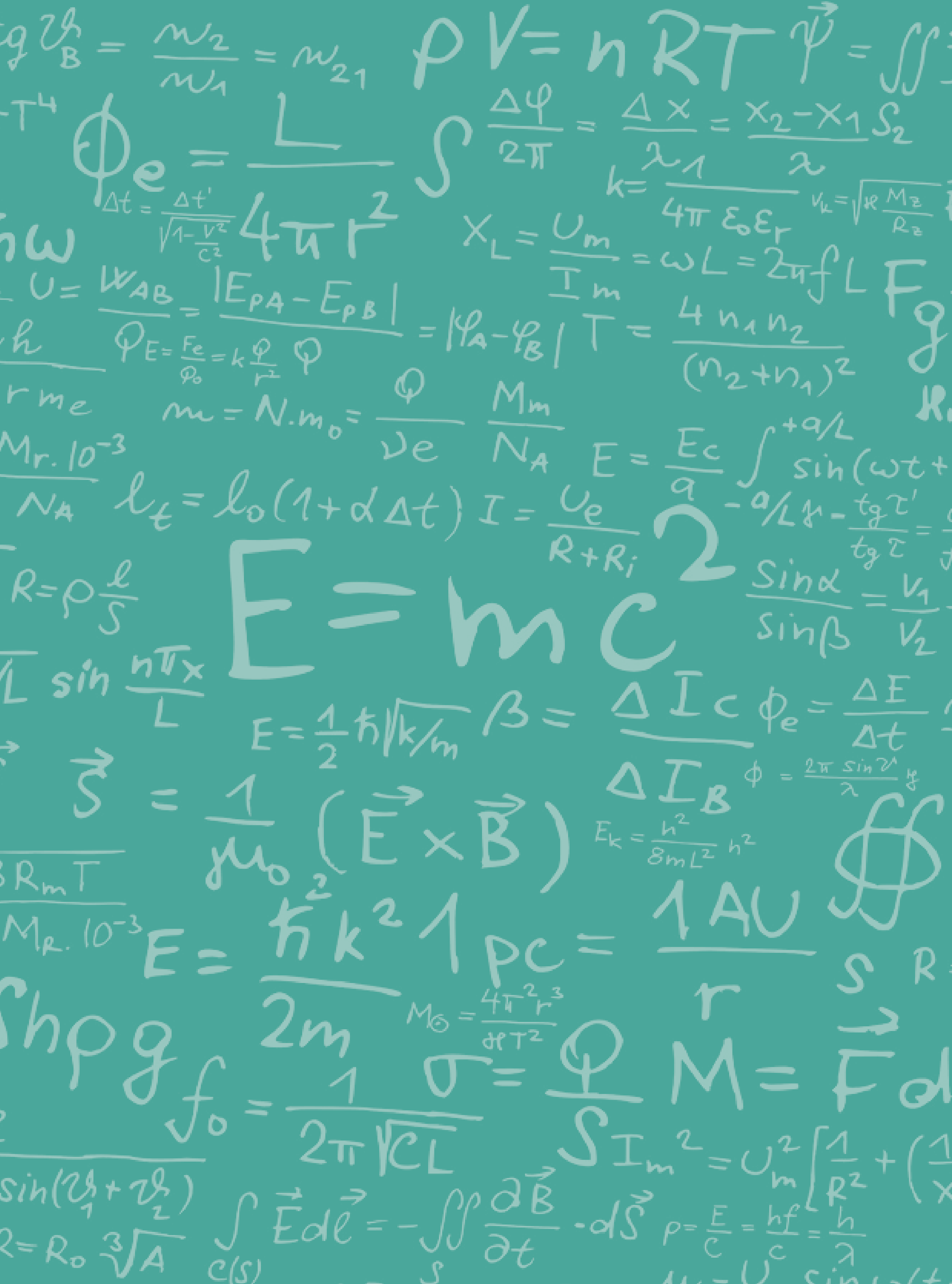
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

Lo podemos usar para calcular el módulo de un vector y para calcular el ángulo que forman dos vectores.

Coordenadas de un punto en el plano

Utilizando un sistema de referencia $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}\}$, definimos las coordenadas de un punto P de la siguiente forma:

$$[\overrightarrow{OP}] = \vec{p} = p_1\vec{u} + p_2\vec{v} \Rightarrow P = (p_1, p_2)$$



pV=nRT
E=mc²
S = 1/μ₀ (E × B)
M = Fd
m = N.m₀
lt = l₀(1+αΔt)
I = Ue/(R+Ri)
R = ρ l/S
E = ħ²k²/2m
1pc = 1AU
f₀ = 1/2π√CL

PLAN NACIONAL
DEL LIBRO Y LA LECTURA
José de la Cuadra

El libro,
la familia y
la comunidad
YO LEO
Fiesta
de la
lectura

¡LEER ENCIENDE TU IMAGINACIÓN!

Visita nuestra página y accede a un mundo de contenidos
www.planlibroylectura.gob.ec

MINISTERIO DE **EDUCACIÓN** • MINISTERIO DE **CULTURA Y PATRIMONIO**

Cómo conseguir un contrato como consultor usando un poco de matemática

Adrián Paenza

Uno puede hacerse pasar por adivino o por una persona muy entrenada en predecir el futuro o aventurar lo que va a pasar en la Bolsa de Valores: basta con aprovechar la rapidez con la que crecen las potencias de un número.

Este es un ejemplo muy interesante. Supongamos que tenemos una base de datos de 128 000 personas. (Por las dudas, no crean que sean tantas, ya que la mayoría de las grandes empresas las tienen, las compran o las averiguan). De todas formas, para lo que quiero invitarles a pensar, podríamos empezar con un número más chico, e igualmente el efecto sería el mismo.

Supongamos que uno elige alguna acción o algún commoditycuyo precio cotice en la Bolsa. Digamos, para fijar las ideas, que uno elige el precio del oro. Supongamos también que ustedes se sientan frente a su computadora un domingo por la tarde. Buscan la base de datos que tienen y seleccionan las direcciones electrónicas de todas las personas que allí figuran. Entonces, a la mitad de ellas (64 000) les envían un mail diciéndoles que el precio del oro va a subir al día siguiente (lunes). Y a la otra mitad les envían un mail diciéndoles lo contrario: que el precio del oro va a bajar. (Por razones que quedarán más claras a medida que avance con el ejemplo, excluiremos los casos en los que el oro permanece con el precio constante en la apertura y el cierre.)

Cuando llega el lunes, al finalizar el día, el precio del oro o bien subió o bien bajó. Si subió, hay 64 000 personas que habrán recibido un mail de ustedes diciéndoles que subiría. Claro, qué importancia tendría. Haber acertado un día lo que pasaría con el oro tiene poca relevancia. Pero sigamos con la idea.

El lunes a la noche, de las 64 000 personas que habían recibido su primer mail diciéndoles que el precio del oro subiría, ustedes seleccionan la mitad (32 000) y les dicen que el martes volverá a subir. Y a la otra mitad, los otros 32 000, les envían un mail diciéndoles que va a bajar.

Llegado el martes por la noche, ustedes están seguros que hay 32 000 para los cuales ustedes no solo acertaron lo del martes, sino que ya habían acertado el lunes. Ahora repitan el proceso. Al dividir por la mitad, a 16 000 les dicen que va a subir y al resto, los otros 16 000, que va a bajar. Resultado: el miércoles ustedes tienen 16 000 personas a las que les avisaron el lunes, el martes y el miércoles lo que pasaría con el precio del oro. Y acertaron las tres veces (para este grupo).

Repítanlo una vez más. Al finalizar el jueves, ustedes tienen 8 000 para los que acertaron cuatro veces. Y el viernes por la noche, tienen 4 000. Piensen bien: el viernes por la noche, ustedes tienen 4 000 personas que los vieron acertar todos los días con lo que pasaría con el precio del oro, sin fallar nunca. Claro que el proceso podría seguir a la semana siguiente, y podrían tener 2 000 al siguiente lunes, 1 000 al martes y, si queremos estirarlo aún más, el miércoles de la segunda semana, tendrán 500 personas a las que les fueron diciendo, día por día, durante diez días, lo que pasaría con el precio del oro.

Si alguno de ustedes pidiera a estas personas que lo contrataran como consultor pagándole, digamos, mil dólares por año (no lo quiero poner por mes, porque tengo cierto pudor… aún) ¿no creen que contratarían sus servicios? Recuerden que ustedes acertaron siempre por diez días consecutivos.

Con esta idea y empezando con una base de datos bien más grande o más chica, o parando antes en el envío de correos electrónicos, ustedes se pueden fabricar su propio grupo de personas que crean en ustedes o que crean sus predicciones. Y ganar dinero en el intento.

Tomado de https://goo.gl/xyX7eq (19/02/2018)

Adrián Paenza (1949). Periodista, matemático y profesor argentino especializado en la divulgación matemática.

Poesía matemática

Millôr Fernandes

En las muchas hojas
del libro de Matemáticas
un Cociente se enamoró
un día dolorosamente
de una Incógnita.

La vio con su mirada innumerable
y la vio desde el ápice a la base:
una figura impar;
ojos de robot, boca de trapecio,
cuerpo rectangular, senos esferoides.

Hizo de la suya una vida
paralela a la de ella,
hasta que se encontraron
en el infinito.

"¿Quién eres tú?" -indagó ella
con ansia radical.
"Pero puedes llamarme hipotenusa".

Y de hablar descubrieron que eran
(lo que en aritmética corresponde a las almas hermanas)
primos entre sí.

Y así se amaron
al cuadrado de la velocidad de la luz,
en una sexta potencia
trazando,
al sabor del momento
y de la pasión,
rectas, curvas, círculos y líneas sinusoidales
en los jardines de la cuarta dimensión.

Escandalizaron a los ortodoxos de las formas euclidianas
y a los exégetas del Universo infinito.
Rompieron convenciones newtonianas y pitagóricas.
Y en fin resolvieron casarse,
constituir un hogar,
más que un hogar, una perpendicular.

Invitaron como padrinos
al Polígono y a la Bisectriz.
E hicieron planos y ecuaciones y diagramas para el futuro
soñando con una felicidad
integral y diferencial.

Y se casaron y tuvieron una secante y tres conos
muy graciosillos.
Y fueron felices
hasta aquel día
en que todo se vuelve al fin
monotonía.

Fue entonces cuando surgió
el Máximo Común Divisor.
Ofrecióle, a ella,
una grandeza absoluta
y la redujo a un denominador común.

Él, Cociente, percibió
que con ella no formaba un todo,
una unidad.
Era un triángulo, llamado amoroso.
De ese problema él era una fracción,
la más ordinaria.

Pero fue entonces cuando Einstein descubrió la Relatividad.
Y todo lo que era espurio pasó a ser
moralidad
como en cualquier sociedad.

Tomado de https://goo.gl/4wgHnQ (04/02/2018)

Millôr Fernandes (1923-2012). Dibujante, humorista, traductor, escritor y dramaturgo brasileño, nacido en el barrio del Méier, en Río de Janeiro. Fue un artista con múltiples funciones y actividades. Escribió en las revistas *El Cruzeiro y El Pasquim*.

Romance de la derivada y el arcotangente

Autor desconocido

Veraneaba una derivada enésima en un pequeño chalet situado en la recta del infinito del plano de Gauss, cuando conoció a un arcotangente simpatiquísimo y de espléndida representación gráfica, que además pertenecía a una de las mejores familias trigonométricas. Enseguida notaron que tenían propiedades comunes.

Un día, en casa de una parábola que había ido a pasar allí una temporada con sus ramas alejadas, se encontraron en un punto aislado de ambiente muy íntimo. Se dieron cuenta de que convergían hacia límites cuya diferencia era tan pequeña como se quisiera. Había nacido un romance. Acaramelados en un entorno de radio épsilon, se dijeron mil teoremas de amor.

Cuando el verano pasó, y las parábolas habían vuelto al origen, la derivada y el arcotangente eran novios. Entonces empezaron los largos paseos por las asíntotas, siempre unidos por un punto común, los interminables desarrollos en serie bajo los conoides llorones del lago, las innumerables sesiones de proyección ortogonal.

Hasta fueron al circo, donde vieron a una troupe de funciones logarítmicas dar saltos infinitos en sus discontinuidades. En fin, lo que eternamente hacían los novios.

Durante un baile organizado por unas cartesianas, primas del arcotangente, la pareja pudo tener el mismo radio de curvatura en varios puntos. Las series melódicas eran de ritmos uniformemente crecientes y la pareja giraba entrelazada alrededor de un mismo punto doble. Del amor había nacido la pasión. Enamorados locamente, sus gráficas coincidían en más y más puntos.

Con el beneficio de las ventas de unas fincas que tenía en el campo complejo, el arcotangente compró un recinto cerrado en el plano de Riemann. En la decoración se gastó hasta el último infinitésimo.

Adornó las paredes con unas tablas de potencias de e preciosas, puso varios cuartos de divisiones del término independiente que costaron una burrada. Empapeló las habitaciones con las gráficas de las funciones más conocidas, y puso varios paraboloides de revolución chinos de los que surgían desarrollos tangenciales en flor. Y Bernoulli le prestó su lemniscata para adornar su salón durante los primeros días. Cuando todo estuvo preparado, el arcotangente se trasladó al punto impropio y contempló satisfecho su dominio de existencia.

Varios días después fue en busca de la derivada de orden n y cuando llevaban un rato charlando de variables arbitrarias, le espetó, sin más:
—¿Por qué no vamos a tomar unos neperianos a mi apartamento? De paso lo conocerás, ha quedado monísimo.
Ella, que le quedaba muy poco para anularse, tras una breve discusión del resultado, aceptó.

El novio le enseñó su dominio y quedó integrada. Los neperianos y una música armónica simple hicieron que entre sus puntos existiera una correspondencia unívoca. Unidos así, miraron al espacio euclideo. Los astroides rutilaban en la bóveda de Viviani... ¡Eran felices!

—¿No sientes calor? —dijo ella.
—Yo sí. ¿Y tú?
—Yo también.
—Ponte en forma canónica, estarás más cómoda.
Entonces él le fue quitando constantes. Después de artificiosas operaciones la puso en paramétricas racionales...
—¿Qué haces? Me da vergüenza... —dijo ella.
—¡Te amo, yo estoy inverso por ti...! ¡Déjame besarte la ordenada en el origen...! ¡No seas cruel...! ¡Ven...! Dividamos por un momento la nomenclatura ordinaria y tendamos juntos hacia el infinito...
Él la acarició sus máximos y sus mínimos y ella se sintió descomponer en fracciones simples. (Las siguientes operaciones quedan a la penetración del lector)

Al cabo de algún tiempo, la derivada enésima perdió su periodicidad. Posteriores análisis algebraicos demostraron que su variable había quedado incrementada y su matriz era distinta de cero. Ella le confesó a él, saliéndole los colores:

—Voy a ser primitiva de otra función. Él respondió:
—Podríamos eliminar el parámetro elevando al cuadrado y restando.
—¡Eso es que ya no me quieres!
—No seas irracional, claro que te quiero. Nuestras ecuaciones formarán una superficie cerrada, confía en mí.

La boda se preparó en un tiempo diferencial de t, para no dar de qué hablar en el círculo de los 9 puntos. Los padrinos fueron el padre de la novia, un polinomio lineal de exponente entero, y la madre del novio, una asiroide de noble asíntota. La novia lucía coordenadas cilíndricas de Satung y velo de puntos imaginarios. Ofició la ceremonia Cayley, auxiliado por Pascal y el nuncio S.S. monseñor Ricatti.

Hoy día el arcotangente tiene un buen puesto en una fábrica de series de Fourier, y ella cuida en casa de 5 lindos términos de menor grado, producto cartesiano de su amor.

Tomado de https://goo.gl/4fz6od (07/07/2017)

La bisabuela Juana (fragmento)

Daniel del Olmo y Abedul

Dante debió equivocarse al describir el infierno. No conocía la casa de mi bisabuela Juana; una antigua casa rural, rodeada de vacas, gallinas, álamos, girasoles y la más absoluta nada. La población más cercana se halla a unos cien kilómetros, así que, hay poco con lo que una persona de ciudad pueda entretenerse, aparte del sofocante calor y los pozos secos. En el fondo, mi bisabuela es un ser extraño. Con sus ciento cuatro años, vive separada del mundo moderno; sin radio, sin periódicos y sin vecinos. Y lo que más fascina, no es su hogar sin ningún tipo de modernidad; es su vitalidad, que tiene anonadada a toda la comarca. Hace años que el médico está idiotizado por su juventud interior, y la flexibilidad de sus movimientos, y no es para menos, ya que ordeña sus vacas y recoge la mies, duro trabajo para una espalda encorvada como la de la bisabuela Juana.

“Ya es hora de que pongas a reflexionar esa cabezota que algún dios te ha dado”, me dijo una soleada mañana mientras desayunaba plácidamente, a la sombra de un álamo. La acompañé a la biblioteca, y allí sacó una caja de unos noventa centímetros por setenta, y sesenta de alto. Era extraordinaria. La madera con la que estaba hecha era de sándalo por el leve aroma que despedía, de ébano, caoba y de roble. La tapa contenía dibujos geométricos en madreperla y estaba rodeada de inscripciones y frases en griego, latín, árabe, jeroglíficos precolombinos y egipcios, escritura cuneiforme, e ideogramas chinos o japoneses, no hubiese sabido diferenciarlos. “Esta caja te dirá lo que es más importante en la vida. Tómate tu tiempo, y resuelve el enigma. Las prisas acortan la vida, recuérdalo”, y me dejó ante la caja, que abrí en el mismo instante en que mi bisabuela abandonaba la sala.

Estaba dividida interiormente en otra caja, con un pequeño compartimento con letras en varias lenguas antiguas, y una balanza de pequeñas dimensiones. Tomé la tapa de la caja interior y la abrí. Era de cristal negro, robusto, pero de tacto frágil. Contenía un trozo de madera, virutas de mineral de hierro, un sello con forma flamígera, un saquito de tierra y una botella de agua.

¿Qué debía descubrir con esto? Son cinco cosas, cinco materias. La tierra contiene a la madera, el metal, el agua y el fuego. El agua apaga el fuego, al igual que la tierra puede extinguir un fuego. El metal nace de la tierra. El fuego nace en la madera, y la madera nace de la tierra. El fuego funde el metal. Los cinco están conectados. No tiene sentido alguno. ¿Qué querrá significar? “Naturaleza”, “medio ambiente”, “elemento”. Probé todas ellas en la balanza, y ninguna dio resultado. De lo que sí me percaté fue que cada letra tenía un peso específico, así que determinado peso debía abrir algún mecanismo interno. Pero aún sabiendo esto, estaba como al principio. Agua, metal, tierra, madera, fuego. Tengo la cabezota oxidada, hacía tiempo que no resolvía ningún enigma así. Yo, estudiante de retórica, estaba atascado en la primera fase. Un tanto deshonroso para mi ego. El tiempo pasa, y sigo en el mismo punto inicial. Tierra, madera, metal, fuego y agua. Y si… los cinco pueden vivir en armonía, puesto que unos de los otros son hacedores y destructores a un tiempo. Si son capaces de vivir en “paz”, los cinco podrán coexistir. Como las personas han de convivir.

Puede ser que "paz" sea la palabra y el concepto que andaba buscando. Busqué las letras y las puse sobre la balanza y… chas-chas-rum. El mecanismo se activó, dejando al descubierto una segunda caja interior que estaba debajo, escondida, de la primera de cristal negro. Fabuloso, la primera fase estaba resuelta. Y sólo habían pasado, ¡vaya!, cinco horas, que fueron todo un desgaste para mi mohoso cerebro.

La segunda caja era de plata, brillaba con el sol del amanecer, tras una vivificante noche de descanso cerebral. Su interior contenía sólo una tablilla con un símbolo, VI. Podía ser un número tal cual; un siglo, un mes, un año; una V y una I, y ser un verbo… Como en la primera caja, podía ser cualquier cosa. Lo que sí estaba claro, es que se acotaba a algo latino, de la antigua Roma. ¿Sucedió algo que implicase ese símbolo? Si era un mes, se trata de junio, pero el calendario que empleamos ahora no coincide con el de los romanos, así que podía descartarse momentáneamente. Si era un número, podía ser en referencia al cuerpo humano; brazos, piernas, cabeza y tronco. Sería "cuerpo" lo que buscaba, o quizá "calendario", "primavera", "estaciones". Como hice el día anterior, busqué las letras pertinentes y las puse en la balanza y ninguna funcionó. Desesperanzado probé con otras materias, puesto que "medicina", "conocimiento general", y "ciencias naturales", no habían funcionado. A lo mejor era algo relacionado con la matemática, lo que me hizo recordar el famoso teorema del hexágono de Pappus de Alejandría.

El teorema de Pappus no hace referencia a alguna medida; es por tanto, de pura incidencia, pero se demuestra usando los axiomas de congruencia de segmentos. Así que VI puede referirse a una incidencia, en un siglo. Bueno, si tomamos como verdad, que lo que buscamos es una incidencia dentro del mundo romano en el siglo VI, coincidiría con el gobierno del emperador Justiniano, durante el cual se produjo el brote epidémico de peste negra más largo, puesto que duró sesenta años, y más antiguo referenciado por los textos históricos.

La palabra tiene que ser "enfermedad". Puse las letras en la balanza y… Nada. Ni un ruido, ni movimiento, nada. Y estaba convencido de que esa era la palabra. Probaremos con la opuesta, "salud", ya que quizá sea lo contrario lo que la caja desea. La balanza contenía las letras, y ¡bingo! El mecanismo se accionó, dejando ver una nueva caja, más pequeña que las anteriores, pero con el mismo sistema que la preliminar.

La tercera caja era de cerámica azul cobalto con dibujos serpenteantes en marfil. De manufactura fina y delicada, parecía a punto de romperse si la tocabas. Y un nuevo enigma para resolver. Era por la tarde, y me había olvidado de comer. Mi bisabuela vino a ver mis progresos, y quedó sorprendida cuando descubrió que ya había abierto dos cajas, e iba a iniciar la tercera (…).

Ahora, estamos ante la tercera llave. Esta caja de porcelana contenía un pergamino enrollado con el símbolo ∞. Este será sencillo, pensé para mis adentros con regocijo, es el símbolo de infinito. Busqué las letras y puse "infinito" en la balanza, y… nada. Era de esperar, no podía ser tan fácil. Infinito es infinito, el más allá, lo más lejano. Lo que no es finito. ¿Qué puede ser infinito? La luz, la pesadez de mi hermana, la estupidez del hombre… Infinito. En algunos aspectos buscamos el infinito, como en el amor o el cariño, o en que las cosas buenas duren por siempre, pero al infinito no se llega nunca. A lo mejor, que la "paz" y la "salud" duren por siempre, sean infinitas, pero para ello tendríamos que vivir sin fin, ser inmortales. Imposible, nadie puede vivir por siempre, ser inmortal, solo son inmortales aquellos que son recordados, como escritores, músicos, científicos, matemáticos o políticos. Seguro que la palabra es "inmortal", no hay lugar a dudas. Al poner las letras en la balanza, nuevo fracaso, a los que ya me estaba habituando, para qué voy a negarlo. Pensándolo más detenidamente, "inmortal" no puedes ser físicamente, pero "longevo" sí. Quizá, por una extraña pirueta retórica, infinito sea inmortal, y este se refiera a longevidad, como mi bisabuela, que ha enterrado a tres hijos y a dos nietos, y ha vivido en dos siglos. Puse las letras de "longevidad" en la báscula y… chas-chas-rum. Increíble, es "longevidad". Infinito es longevidad. En el exterior hace tiempo que el sol se marchó, serían las dos o tres de la mañana, y estaba exultante por haber hallado la tercera palabra.

Y como no, una nueva caja me esperaría mañana. Ahora mis sesos necesitaban un nuevo descanso; el moho que los recubría estaba desapareciendo, y eso me hacía estar contento.

Aquella mañana fue húmeda. Había llovido persistentemente durante la madrugada y el calor matinal creaba condensaciones que te hacían sudar más de lo que era habitual a esas horas. Desayuné tranquilamente un gran tazón de leche de cabra con unos picatostes fríos del día anterior. Mi bisabuela me miraba de soslayo, con cierta impaciencia quizá, era difícil saber qué pensaba. Me marché a la biblioteca para enfrentarme al nuevo reto, la cuarta caja. Esta caja era de cuarzo rosa, pesada y algo basta. De gruesas paredes que no permitían el paso de la luz. En su interior sólo había un papiro con el símbolo ϖ. Como en el caso anterior, enseguida me vino a la cabeza 3,14, que es su correspondiente numérica, pero no podía ser, puesto que no había números en las piezas de la balanza. Así que debía ser otra cosa. Este símbolo tiene siglos de antigüedad: ya lo usaban los chinos, los mesopotámicos, e incluso los egipcios. El papiro de Ahmes, de 1900 a.C, hallado en Egipto, es la primera referencia a este concepto. ϖ se emplea en matemática, en ingeniería, en física, y en otras tantas materias. Es una constante, irracional.

Teniendo en cuenta mi experiencia con las anteriores cajas, sé que tengo que encontrar un concepto intangible, como paz, salud o longevidad. El propio soporte de la pista puede ser una pista. ϖ puede ser una casa, un barco, un melocotón, puede encontrarse en todo lo que nos rodea, incluso en las personas. Es irracional, como para los egipcios la muerte, el dolor o la felicidad. Eso era, "felicidad", esta es la palabra, el concepto que busco. Introduje las letras en la balanza y la caja reaccionó. Pero ya no había más cajas. La de cuarzo era la última, y solo tenía cuatro palabras.

Tomado de https://goo.gl/ivGJiW (05/03/2018)

Daniel del Olmo y Abedul. Alumno del Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil, de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid.

Armonía, belleza y precisión

Juan Manuel Sánchez Panta

La esplendida serie de números son joyas de mi jardín,
el horizonte de la matemática es brillante,
es como saborear sabiduría dentro de un cuadrante
mi inspiración crece lozana como un jazmín.

La creación y la solución de problemas es mi universo,
la rigidez en el cálculo activa mi memoria,
las ecuaciones polinomiales son parte de mi historia,
la armonía de las sucesiones embellecen mis versos.

Describo las rectas, con inusitada pasión,
las coordenadas de los puntos las llevo a los cuadrantes,
el movimiento de las figuras vibra en un sol radiante,
la matemática es belleza y precisión

desde el místico Pitágoras el inmortal,
hasta los brillantes Leignit y Newton.
con su función y ecuación diferencial,
la matemática se cubre de gloria.

Puntos, rectas y planos, están en sintonía,
con el místico y complejo mundo de la geometría,
todo vibra con una real simetría
la convexidad y la concavidad es virtud de la materia.

Los números reales son densos e inmensos,
las expresiones notables son factorizables,
algunas expresiones son derivables e integrables,
el álgebra de los anillos cuerpos y campos son hermosos.

El mundo de los números devoran mi imaginación,
estudio teoremas, propiedades, y leyes con plenitud
el talento que Dios me ha dado es una virtud
pasar el espacio tridimensional a la cuarta dimensión
es mi obsesión.

Tomado de https://goo.gl/Tuq3G0 (26/03/2018)

Juan Manuel Sánchez Panta. Divulgador de conocimientos matemáticos en obras literarias.

Una confusión cotidiana

Franz Kafka

Un problema cotidiano, del que resulta una confusión cotidiana. A tiene que concretar un negocio importante con B en H, se traslada a H para una entrevista preliminar, pone diez minutos en ir y diez en volver, y en su hogar se enorgullece de esa velocidad. Al día siguiente vuelve a H, esa vez para cerrar el negocio. Ya que probablemente eso le insumirá muchas horas. A sale temprano. Aunque las circunstancias (al menos en opinión de A) son precisamente las de la víspera, tarda diez horas esta vez en llegar a H. Lo hace al atardecer, rendido. Le comunicaron que B, inquieto por su demora, ha partido hace poco para el pueblo de A y que deben haberse cruzado por el camino. Le aconsejan que aguarde. A, sin embargo, impaciente por la concreción del negocio, se va inmediatamente y retorna a su casa.

Esta vez, sin prestar mayor atención, hace el viaje en un rato. En su casa le dicen que B llegó muy temprano, inmediatamente después de la salida de A, y que hasta se cruzó con A en el umbral y quiso recordarle el negocio, pero que A le respondió que no tenía tiempo y que debía salir en seguida.

Pese a esa incomprensible conducta, B entró en la casa a esperar su vuelta. Ya había preguntado muchas veces si no había regresado todavía, pero continuaba aguardando aún en el cuarto de A. Contento de poder encontrarse con B y explicarle lo sucedido, A corre escaleras arriba. Casi al llegar, tropieza, se tuerce un tobillo y a punto de perder el conocimiento, incapaz de gritar, gimiendo en la oscuridad, oye a B -tal vez ya muy lejos, tal vez a su lado- que baja la escalera furioso y desaparece para siempre.

Tomado de https://goo.gl/5921yo (23/03/2018)

Franz Kafka (1883-1924). Escritor nacido en Praga, en el seno de una familia acomodada perteneciente a la minoría judía de lengua alemana.

Examen de Estadística

José del Río Sánchez

¿Qué es la Estadística?
Es una ciencia fotográfica y adivinatoria
que procede en primera instancia
como una película,
donde graban sus números
la realidad y la apariencia.

Cruza después al otro lado
para vaticinar el éxito
o embalsamar la ruina,
pues el oráculo de sus campanas
siempre se puede modular
eligiendo los prismáticos adecuados
¿Para qué sirven las estadísticas?
Para generar hambres y vender tapaderas,
para dictar la norma
e imponer su razón

Con ellas se averigua cómo y cuando
llamar a la oración y al voto,
a la guerra y a la trashumancia,
a la risa y al tributo.
Ni las ovejas negras
pueden huir de sus dominios

Tomado de https://goo.gl/h3SbRg (26/03/2018)

José del Río Sánchez (1960). Escritor y matemático, quien ha argumentado que en las grandes obras de la literatura universal, en *El Quijote de la Mancha*, se ha empleado las matemáticas. Publicó el libro: *También los novelistas saben matemáticas.*

Límite

Carmen Conde

Esfera ceñida de esferas que no pueden
escaparse de la esfera única.
Manos esféricas ciñéndose a unas piernas
que se abrazan redondas, perfectísimas.

Si esta esfera que soy yo, que fui yo siempre,
desgajara de sí un anillo y lo arrojara,
se caería
cogido por su extremo, prolongándose
hasta pisar el polvo.
Ondularía siglos, y su música
subiría por temblores a la esfera
que la retiene siempre jamás, tan suyo.

Sería vertical, hasta que un siglo
la curva reclamaría ser redonda
desde un albor sin ritmo. Subiría
otra vez a ser anillo, anegándose
por amor de querencia inmarchitable,
en la esfera total.

Yo he sido anillo,
tembloroso al caer, y erguida
me dejaba correr desde los tiempos...

Mas la esfera sintió que al fin mi esencia
debía descansar en lo redondo.

Tomado de https://goo.gl/H4SB3f (19/03/2018)

Carmen Conde (1907-1996). Narradora, poetisa, dramaturga, ensayista y maestra española, considerada una de las voces más significativas de la generación poética del 27. Ha publicado *Entre aceitunas y coplas*, *Brocal*, *Júbilos*, *Oíd a la vida*.

ISBN: 978-9978-71-991-6
9789978719916

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

Toda una Vida

EL
GOBIERNO
DE TODOS

@MinisterioEducacionEcuador @Educacion_EC /MinEducacionEcuador /Educacionecuador

www.educacion.gob.ec

Información: 1800 EDUCACIÓN (338222) o **info@educacion.gob.ec**